Cours Euler: Corrigé 17

17 janvier 2024

Exercice 1

NO 195.
Pour Solange : $4^2 \cdot 4^4 = (2^2)^2 \cdot (2^2)^4 = 2^4 \cdot 2^8$. Pour Charly : $4^2 \cdot 4^4 = 4^6$ car les exposants s'additionnent et pour Jérôme : $4^2 \cdot 4^4 = 16 \cdot (4^2)^2 = 16 \cdot 16^2 = 16^3$. Dans tous les cas, on tombe sur la valeur $4^2 \cdot 4^4$.

NO 196.
Dans la première partie on utilise le fait que $a^{n+k} + a^n = a^n(a^k + 1)$, de même pour une soustraction. Dans la deuxième partie c'est la règle vue en cours $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Pour un produit de puissances *du même nombre* les exposants s'additionnent.
Pour la division $a^n : a^m = a^{n-m}$, les exposants se soustraient ; et enfin la puissance d'une puissance $(a^n)^m = a^{nm}$. Les exposants se multiplient.

NO 197.

a) $2^2 \cdot 2^5 = 2^7 = 128$

b) $4^4 \cdot 4^2 = 4^6 = 4096$

c) $3^3 + 3^3 = 2 \cdot 3^3 = 54$

d) $10^0 : 10^0 = 1$

e) $10^6 - 10^2 = 999900$

f) $7^3 - 6^3 = 127$

g) $(5^1)^2 = 5^2 = 25$

h) $5^2 \cdot 2^2 = (2 \cdot 5)^2 = 100$

i) $2^7 - 2^3 = 2^3(2^4 - 1) = 8(16 - 1) = 120$

j) $10^6 : 10^2 = 10^4$

k) $2^{\left(2^3\right)} = 2^8 = 256$

l) $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$

m) $2^2 + 2^5 = 36$

n) $(10^3)^2 = 10^6$

o) $\frac{10^3}{10^6} = 10^{-3}$

p) $10^3 \cdot 10^2 = 10^5$

q) $\frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

r) $3^3 \cdot 4^2 = 27 \cdot 16 = 432$

Exercice 2

a) est correcte, les exposants s'additionnent, les deux valent donc 3^{10}. Par contre
b) est fausse pour la même raison : $4 + 2 \neq 2 + 5$.
c) est fausse aussi car $3 + 5 \neq 3 \cdot 2$, par contre
d) est vraie. Ensuite
e) est fausse car $6^3 \cdot 6^3 = (6^3)^2$.
f) est fausse car les exposants ne se distribuent pas. De fait $7^3 + 7^4 = 7^3(1 + 7) = 8 \cdot 7^3$
g) est vraie. Par contre pour
h) $9^3 : 9 = 9^2$ et
i) $10000^5 = (10^4)^5 = 10^{20}$ et enfin
j) $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \neq 49$.

Exercice 3

a) $x = 2$

b) $x = 1$

c) $x = 0$

d) $x = -6$

e) $x = 2$

f) $a = 4$ et $y = 2$
$a = 2$ et $y = 4$
$a = 16$ et $y = 1$

g) $p = 3$

h) $f = 3$

i) $b = 6$

j) $x = 1$

k) $k = 2$

l) $x = 1$

m) $x = 2$

n) $x = 3$

o) $x = 1$

Exercice 4

Série 1

1. $2a^2 \cdot 3a^4 = 6a^6$
2. $(-3b^2)(-2b^3) = 6b^5$
3. $4a^2(-2b^2) = -8a^2b^2 = -8(ab)^2$
4. $3a^3b^2(-5a^5b^4) = -15a^8b^6$
5. $(2a^2)^3 = 2^3a^6 = 8a^6$
6. $(-3b^4)^2 = 9b^8$
7. $(-5a^2b^3)^3 = (-5)^3a^6b^9$
8. $-(-2a^2b)^2 = -\left((-2)^2a^4b^2\right) = -4a^4b^2$
9. $\left(\frac{1}{2a^2}\right)^3 = \frac{1}{8a^6} = \frac{1}{8}a^{-6}$
10. $\left(\frac{-3b^3}{4}\right)^2 = \frac{9b^6}{16} = \frac{9}{16}b^6$
11. $\left(-\frac{a^2}{b^5}\right)^3 = \left(-\frac{a^6}{b^{15}}\right) = -\frac{a^6}{b^{15}}$
12. $-\left(-\frac{a}{b^4}\right)^2 = -\frac{a^2}{b^8}$

Série 2.

1. $(-2a^2a^3)^2 = 4(a^5)^2 = 4a^{10}$
2. $(-3a^2b \cdot ab^2)^3 = -3^3(a^3b^3)^3 = -27a^9b^9$
3. $(-4a^2b)^2(2ab)^3 = 16a^4b^2 \cdot 8a^3b^3 = 128a^7b^5$
4. $(-4a^3b^3)^2 + (2a^2b^2)^3 = 16a^6b^6 + 8a^6b^6 = 24a^6b^6$
5. $\left(\frac{2a^3}{3a}\right)^2 = \left(\frac{2a^2}{3}\right)^2 = \frac{4a^4}{9}$
6. $\left(-\frac{3}{5}a^3\right)\left(\frac{25}{9}a^2\right) = -\frac{5}{3}a^5$
7. $(0,2a^2)(0,1a^3)^2 = (0,2a^2)(0,01a^6) = 0,002a^8$
8. $2a^5 - (-3a^2)^3 = 2a^5 - (-27a^6) = 2a^5 + 27a^6$
9. $-\left(\frac{-2a^3b}{3ab^3}\right)^2 = -\left(\frac{-2a^2}{3b^2}\right)^2 = -\frac{4a^4}{9b^4}$
10. $9a\left(\frac{4b}{6a}\right)^3 = 9a\left(\frac{2b}{3a}\right)^3 = 9a\frac{8b^3}{27a^3} = \frac{8b^3}{3a^2}$

Exercice 5

Dans cet exercice nous utiliserons la proposition sur les propriétés des fractions. Par exemple nous écrivons 3. pour faire référence à la troisième propriété dans cette proposition.

1. Pour montrer que toute puissance paire d'un nombre réel est positive, nous utiliserons sans preuve le fait suivant : Le carré de n'importe quel nombre réel est positif.
   Maintenant, considérons x^{2n} pour un nombre réel x et un nombre entier n. Si $n = 0$, alors par la définition de la puissance, $x^{2n} = x^0 = 1 \geq 0$. Si $n \neq 0$, alors en utilisant la propriété (vi) des puissances entières, on a que
   $$x^{2n} = x^{n+n} \overset{(vi)}{=} x^n \cdot x^n = (x^n)^2 \,.$$

Ainsi, x^{2n} est un carré d'un nombre réel et donc positif.

2. Soit a un nombre entier et x un nombre réel non nul. Pour montrer que $\left(\frac{1}{x}\right)^a$ est l'inverse de x^a il suffit de multiplier l'un par l'autre et prouver que le résultat donne 1, Calculons donc en utilisant la propriété 1, i.e., la puissance d'un produit est le produit des puissances :

$$\left(\frac{1}{x}\right)^a \cdot x^a = \left(\frac{1}{x} \cdot x\right)^a = 1^a = 1$$

puisque $1/x$ est l'inverse de x et que la puissance a-ème de 1 vaut 1.

3. On a $(x^a)^b = x^{a \cdot b} = x^{b \cdot a} = \left(x^b\right)^a$ par la propriété 4. des puissances et la commutativité de la multplication pour l'égalité centrale.

4. On calcule :

$$\begin{aligned}
(x-y)^3 &= (x-y)(x-y)^2 = x(x-y)^2 - y(x-y)^2 && \text{distribution de } \cdot \text{ sur } + \text{ et } - \text{ dans } \mathbb{R} \\
&= x(x^2-2xy+y^2) - y(x^2-2xy+y^2) && \text{identité remarquable} \\
&= x^3 - 2x^2y + xy^2 - (yx^2 - 2xy^2 + y^3) && \text{par distributivité} \\
&= x^3 - 2x^2y + xy^2 - yx^2 + 2xy^2 - y^3 && \text{l'opposé se distribue sur toute la parenthèse} \\
&= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 && \text{commutativité de } \cdot \text{ et commutativité de } +
\end{aligned}$$

Exercice 6

Partie A.

(a) $\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{15}\sqrt{4} = 2\sqrt{15} = \sqrt{4}\sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{12}\sqrt{5}$
Mais $3\sqrt{20} = 6\sqrt{5}$ est différent des autres expressions.

(b) $\sqrt{27} = \sqrt{20+7} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3} = \sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}$
Mais $3\sqrt{9} = 9$ est différent des autres expressions.

(c) $\sqrt{441} = \sqrt{49}\sqrt{9} = 7\sqrt{9} = \sqrt{21}\sqrt{3}\sqrt{7} = \sqrt{400} + \sqrt{1} = 20 + 1 = 21$
Toutes les expressions sont égales.

(d) $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{1}{8}\sqrt{25} = \frac{5}{8} = \frac{5}{\sqrt{64}}$
Mais $\frac{2,5}{6,4} = \frac{5}{12,8}$ est différent des autres expressions.

Partie B.

a) $\sqrt{175} = \sqrt{5 \cdot 35} = 5\sqrt{7}$

b) $\sqrt{300} = \sqrt{3 \cdot 10^2} = 10\sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{1080} = \sqrt[3]{9 \cdot 120} = \sqrt[3]{27 \cdot 40} = 3\sqrt[3]{8 \cdot 5} = 6\sqrt[3]{5}$

d) $5\sqrt{252} = 5\sqrt{2 \cdot 126} = 5\sqrt{4 \cdot 63} = 10\sqrt{9 \cdot 7} = 30\sqrt{7}$

e) $\sqrt{18} + \sqrt{32} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

f) $\sqrt{50}\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{25 \cdot 2} \cdot 4 = 20\sqrt{2}$

g) $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

Partie C.

(a) $\sqrt{900} = 30$

(b) $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$

(c) $\sqrt[3]{1000000} = 100$

(d) $\sqrt{10^6} = 1000 = 10^3$

(e) $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$

(f) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

(g) $\sqrt[3]{-1} = -1$

(h) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{800} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = 40$

(i) $\sqrt{17}^2 = 17$

(j) $\sqrt{1521} = \sqrt{9 \cdot 169} = 3 \cdot 13 = 39$

(k) $\sqrt{81} + \sqrt{121} = 9 + 11 = 20$

(l) $\sqrt{12} : \sqrt{3} = \sqrt{4} = 2$

Exercice 7

Les nombres a et b étant réels, énonce les conditions d'existence des expressions suivantes. Par exemple l'expression $\sqrt{-a}$ existe si $a \leq 0$.

1. $\sqrt{ab}$ existe si a et b sont de même signe (y compris si l'un des deux est nul).
2. $\sqrt{-ab}$ existe si a et b sont de signes différents (ou si l'un des deux est nul).
3. $\sqrt{-a^3b^3}$ existe si a et b sont de signes différents (ou si l'un des deux est nul).
4. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ existe si b est non nul et si a et b sont de même signe.
5. $\sqrt{\dfrac{a^3}{b^2}}$ existe si a est positif et b est non nul.
6. $\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$ existe si b est non nul et si a et b sont de même signe.
7. $\sqrt{\dfrac{-a^2}{b}}$ existe si $b < 0$ ou si $b > 0$ et $a = 0$.
8. $\sqrt{-a^2b}$ existe si b est négatif ou si l'un des deux nombres a ou b est nul.

Exercice 8

Le nombre 10^{2017} a exactement 2018 chiffres, il commence par 1 et est suivi de 2017 zéros. Lorsqu'on soustrait 1 on obtient un nombre a 2017 chiffres constitué de 9 uniquement. Soustrayons encore 2016 on trouve un nombre qui a toujours 2017 chiffres, seuls les 4 derniers chiffres ont été modifiés et sont maintenant $9999 - 2016 = 7983$. Par conséquent la somme des chiffres du nombre cherché vaut

$$2013 \cdot 9 + 7 + 9 + 8 + 3 = 18'144$$

Exercice 9

9.

1) $\sqrt{a^2bc^3} = \sqrt{a^2c^2bc} = \sqrt{a^2c^2}\sqrt{bc} = \sqrt{(ac)^2}\sqrt{bc} = ac\sqrt{bc}$ car $ac > 0$.

2) $\sqrt{\frac{a^5}{b^2}c^3} = \sqrt{\frac{a^4}{b^2}ac^2c} = \sqrt{\frac{a^4}{b^2}c^2}\sqrt{ac} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{b}c\right)^2}\sqrt{ac} = \frac{a^2c}{b}\sqrt{ac}$ car $\frac{a^2c}{b} > 0$.

3) $\sqrt{a^3b^3c^4} = \sqrt{a^2b^2c^4ab} = \sqrt{a^2b^2c^4}\sqrt{ab} = abc^2\sqrt{ab}$.

4) $\sqrt{a^2\frac{a^3b^4}{b^3}c^2} = \sqrt{a^5bc^2} = \sqrt{a^4c^2ab} = a^2c\sqrt{ab}$.

10.

1) $\sqrt{a^4b^2}$ existe toujours.
$\sqrt{a^4b^2} = \sqrt{a^4}\sqrt{b^2} = \sqrt{(a^2)^2}\sqrt{b^2} = \left(\sqrt{a^2}\right)^2\sqrt{b^2} = a^2|b|$

2) $\sqrt{a^7b^3}$ existe si a et b sont tous les deux positifs, tous les deux négatifs (ou si l'un des deux est nul).
$\sqrt{a^7b^3} = \sqrt{a^6b^2}\sqrt{ab} = |b|\sqrt{(a^2)^3} = |b|\left(\sqrt{a^2}\right)^3\sqrt{ab} = |a|^3|b|\sqrt{ab} = |a^3b|\sqrt{ab}$

3) $\sqrt{\frac{a^3}{b^4}}$ existe si a est positif et b non nul.
$\sqrt{\frac{a^3}{b^4}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^4}a} = \frac{a}{b^2}\sqrt{a}$
Noter qu'ici on a bien $\sqrt{a^2} = a$ car l'expression donnée existe seulement si a est positif.

4) $\sqrt{a^3b^4}$ existe si a est positif ou si l'un des deux nombres a ou b est nul.
$\sqrt{a^3b^4} = \sqrt{a^2b^4}\sqrt{a} = ab^2\sqrt{a}$ car ab^2 est positif.

Exercice 10

1) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{12}{2}} = \sqrt{6}$

4) $\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5\cdot 2}{2\cdot 2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

5) $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(5-\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}-2}{2}$

6) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1\,;$

7) $\dfrac{19\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \dfrac{19\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)} = \dfrac{19\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)}{4-5} = \dfrac{19\cdot\left(2\sqrt{5}-5\right)}{-1} = 95-38\sqrt{5}.$

Exercice 11

1. $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $4+3 = 7$ donc $\sqrt{16+9} < 4+3$
2. Pour comparer les deux expressions, mettons-les au carré : $\left(\sqrt{25+5}\right)^2 = \left(\sqrt{30}\right)^2 = 30$
$\left(5+\sqrt{5}\right)^2 = 25+10\sqrt{5}+5 = 30+10\sqrt{5} > 30$
Donc $\sqrt{25+5} < 5+\sqrt{5}$
3. Pour comparer les deux expressions, mettons-les au carré : $\left(\sqrt{8+3}\right)^2 = 11$
$\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)^2 = 8+3+2\sqrt{8\cdot 3} = 11+4\sqrt{6} > 11$
Donc $\sqrt{8+3} < \sqrt{8}+\sqrt{3}$
4. $\sqrt{a^2+b^2}$ est la longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont de longueur a et b. Puisque cette hypothénuse est de longueur inférieure à $a+b$, alors $\sqrt{a^2+b^2} < a+b$.
Algébriquement, si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2 < a^2+b^2+2ab = (a+b)^2$. Vu que $\sqrt{a^2+b^2}$ et $a+b$ sont des nombres positifs, on conclut que $\sqrt{a^2+b^2} < a+b$.
5. $\sqrt{a^2+0} = a+0$ et $\sqrt{b^2+0} = b+0$.
Pour comparer $\sqrt{a^2+b^2}$ avec $|a|+|b|$, on élève au carré :
$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2$ et $(|a|+|b|)^2 = a^2+b^2+2|a||b| \geq a^2+b^2$. Donc $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$.
Mais nous ne pouvons pas comparer $\sqrt{a^2+b^2}$ avec $a+b$ lorsque a et b sont des réels (donc pas forcément positifs). Par exemple, avec $a = -1$ et $b = 1$: $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} > a+b = 0$ et avec $a = b = 1$: $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} < a+b = 2$.

6. Comme nous l'avons vu avant : $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$. De plus $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2} = |a|+|b|$, $a+b \leq |a|+|b|$.

Exercice 12

Garam.