Cours Euler: Série 18

15 janvier 2025

Dans les exercices suivants, l'auteur utilise le mot “radicaux" pour racines.

Exercice 1

9. Simplifie les expressions suivantes en te servant des propriétés des radicaux ($a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}_0^+, c \in \mathbb{R}^+$) :

1) $\sqrt{a^2bc^3}$

2) $\sqrt{\frac{a^5}{b^2}c^3}$

3) $\sqrt{a^3b^3c^4}$

4) $\sqrt{a^2\frac{a^3b^4}{b^3}c^2}$

10. Simplifie les expressions suivantes après avoir précisé les conditions d'existence et sans changer celles-ci :

a. 1) $\sqrt{a^4b^2}$

2) $\sqrt{a^7b^3}$

3) $\sqrt{\frac{a^3}{b^4}}$

★ 4) $\sqrt{a^3b^4}$

Exercice 2

A l'aide des propriétés des racines carrées, rends rationnel le dénominateur des expressions suivantes.
Indication. une identité remarquable sera parfois utile.

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$

4) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

5) $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

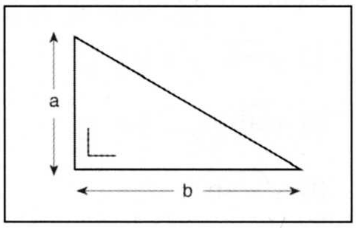
6) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

7) $\frac{19\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$

Exercice 3

Complète à l'aide des signes $\leqslant$, $<$, $=$, $>$ ou $\geqslant$ les énoncés suivants :

1) $\sqrt{16+9}$ ... $4+3$
2) $\sqrt{25+5}$ ... $5+\sqrt{5}$
3) $\sqrt{8+3}$ ... $\sqrt{8}+\sqrt{3}$
4) $\sqrt{a^2+b^2}$ ... $a+b$ $(a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}_0^+)$
Pour ce faire, tu peux t'aider d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont a et b pour mesure et t'inspirer de l'inégalité triangulaire●.



5) $\sqrt{a^2+0}$ ... $a+0$ ou $\sqrt{0+b^2}$ ... $0+b$ $(a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}_0^+)$
D'où si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors on a $\sqrt{a^2+b^2}$ ... $a+b$.

6) Pour a et b des nombres réels non nuls, quelles sont les relations d'égalité $(=)$, de non égalité$(\neq)$, et d'ordre $(<, \leq)$ que l'on peut éventuellement établir entre

$$\sqrt{a^2+b^2}, \quad a+b, \quad \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}, \quad |a|+|b|.$$

Exercice 4

13. Calcule, sans l'aide de ta calculatrice, en ne laissant ni exposant ni racine dans ta réponse :

1) $\sqrt{81}$
2) $\sqrt[3]{27}$
3) $\sqrt[3]{-125}$
4) $-\sqrt[3]{8}$
5) $\sqrt[4]{16^2}$
6) $\sqrt[3]{8^{-1}}$
7) $\sqrt[6]{4^{-9}}$
8) $\sqrt[3]{-2^6}$

14. Calcule à l'aide de ta machine, la valeur approchée de la racine cubique à 10^{-2} près par défaut des réels suivants :

1) -65
2) π
3) $\sqrt{5}$
4) $\sqrt{456}$
5) $1-\sqrt{3}$
6) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

15. En utilisant les propriétés des racines nièmes, effectue et simplifie :

1) $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{3^7}$
2) $\sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{32}$
3) $\sqrt[3]{a^4}\,\sqrt[3]{a^5}$
4) $\dfrac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[3]{2}}$

16. ★
Rends rationnels les dénominateurs des fractions suivantes :

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$
2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$
3) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}}$
4) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}}$
5) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{4}}$
6) $\dfrac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{9}}$

17. Calcule le carré et le cube de :

1) $\sqrt[3]{2}$
2) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}$
3) $\sqrt[3]{3}+1$
4) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$

18. Écris plus simplement et donne les conditions d'existence :

1) $\sqrt{\sqrt{a^2}}$
2) $\sqrt[3]{\sqrt{b^2}}$
3) $\sqrt{\sqrt[3]{b^2}}$
4) $\sqrt{\sqrt[3]{-a^2}}$

19. Effectue et simplifie :

1) $\sqrt[3]{4}\,.\,\sqrt{2}$
2) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt[4]{3}}$

Exercice 5 (Optionnel)

La calculatrice est autorisée pour cet exercice où les réponses sont demandées au millième, si elles ont un sens. Attention à l'ordre des opérations !

Série 1. 1) $\sqrt[3]{7}$ 2) $\sqrt[5]{2^3}$ 3) $\sqrt[7]{-3^2}$ 4) $\sqrt[7]{(-3)^2}$ 5) $\sqrt[6]{1/3}$ 6) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Série 2. 1) $\left(2+\dfrac{1}{7}\right)^{1/2}$ 2) $3^{1/4}-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^{1/3}$ 3) $\sqrt{(2+3)^{\frac{1}{3}}}$ 4) $\sqrt{2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}}$

Série 3. Si $a=\dfrac{2}{7}, b=\sqrt{3}$ et $c=-\dfrac{2}{3}$, utilise les mémoires de ta calculette pour trouver :

1) $a+b\sqrt[3]{c}$ 2) $(a+b)\,\sqrt[3]{c}$ 3) $(a+b)^{\frac{1}{2}}\,c^{\frac{1}{3}}$ 4) $\left[(a+b)c^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$

5) $\sqrt{a+b^{\frac{1}{2}}}$ 6) $\left(\sqrt{a+b}\right)^4$ 7) $(a+b+c)^{\frac{1}{2}}$ 8) $\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^{-\frac{2}{3}}$

Exercice 6

Partie A. Calcule les expressions suivantes en utilisant les propriétés des puissances rationnelles (sans passer par des racines).

(a) $3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}$

(b) $7^{\frac{5}{2}}\cdot 7^{-\frac{3}{2}}$

(c) $6^{\frac{1}{4}}\cdot 6^{\frac{1}{2}}\cdot 6^{-\frac{3}{4}}$

(d) $\dfrac{2^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}$

(e) $\dfrac{27^{\frac{4}{3}}}{27^{\frac{2}{3}}}$

(f) $(-27)^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{-1}$

Partie B. Ici $a>0$, $m\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}$. Ecris les expressions suivantes à l'aide d'exposants :

(a) $\sqrt{a},\quad \sqrt[7]{a},\quad \sqrt{a^7},\quad \sqrt{a^2}$

(b) $\sqrt[3]{a^3},\quad \sqrt[3]{a^9},\quad \sqrt[4]{a^{12}},\quad \sqrt[4]{a^{18}}$

(c) $\sqrt{a^0},\quad \dfrac{\sqrt{a^2}}{\sqrt[4]{a^4}},\quad \sqrt[3]{\dfrac{1}{a}},\quad \dfrac{\sqrt[16]{a^8}}{\sqrt[7]{a^{28}}}$

(d) $\sqrt{\dfrac{a^3}{a^6}},\quad \sqrt[8]{\dfrac{a^{24}}{a^{12}}},\quad \left(\sqrt[7]{a^6}\right)^2$

(e) $\sqrt[m]{a^n},\quad \sqrt[3]{a^{2n}},\quad \sqrt[3m]{a^{6n}},$

(f) $\dfrac{a^n}{\sqrt[m]{a^0}},\quad \sqrt[2m]{\dfrac{a^{3n}}{a^{2n}}},\quad \dfrac{\sqrt[8m]{a^{2n}}}{\sqrt[3m]{a^n}}$

Partie C. Ici $a>0$, $m\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}$. Ecris les expressions suivantes sous forme de racine et de puissance :

(a) $a^{\frac{1}{2}},\quad a^{\frac{3}{4}},\quad a^{\frac{7}{1}}$

(b) $a^{\frac{4}{6}},\quad a^{\frac{16}{12}},\quad a^{-\frac{1}{3}}$

(c) $a^{\frac{1}{m}},\quad a^{\frac{n}{m}},\quad a^{-\frac{1}{m}}$

(d) $a^{-\frac{n}{m}},\quad a^{\frac{2n}{6m}}$

Exercice 7

Un peu de théorie. On demande une démonstration avec tous les détails et les justifications !

1) Démontre que $\sqrt[n]{x^n}=|x|$ si n est pair.

2) Démontre les propriétés des racines (2) (racine d'un quotient) et (5) (produit de deux racines d'un même nombre) de la Proposition 2.4.

3) Démontre la propriété des puissances rationnelles (2) : $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r=\dfrac{x^r}{y^r}$.

Exercice 8

Pour 20. et 21., utilise les *propriétés des puissances rationnelles* pour simplifier les expressions.

20. Écris sous la forme d'une puissance de a ($a \in \mathbb{R}_0^+$) les expressions suivantes ; donne ensuite une réponse sans exposant négatif, ni fractionnaire :

1) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{4}}$
2) $\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$
3) $a^{-\frac{1}{2}}a^2$
4) $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$
5) $a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$
6) $\left(\dfrac{2}{a^{\frac{-1}{2}}}\right)^3$
7) $a^{1,25}a^{1,50}$
8) $\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-2}\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{-1}$

21.

Utilise les exposants fractionnaires pour simplifier les expressions suivantes ; donne ensuite une réponse sans exposant négatif, ni fractionnaire ($a \in \mathbb{R}_0^+$) :

1) $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a}$
2) $\sqrt[4]{a^2}\sqrt[3]{a}$
3) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$
4) $\dfrac{\sqrt[3]{a}\,\sqrt{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}}$
5) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{a^2}}$
6) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^{-1}}}{a\sqrt{a^{-2}}}\right)^3$
7) $\dfrac{27a^{-2}\sqrt{a^4}}{64\sqrt{a\sqrt{a}}}$

Exercice 9

Vrai ou faux ? Justifie tes réponses.

1) $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} = a+b$ si $a, b \in \mathbb{R}$
2) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right) = a-b$ si $a, b \in \mathbb{R}_+$
3) $\sqrt[n]{x^{3n}} = x^3$ si $x \in \mathbb{R}_+$
4) $\sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{1}{2}}$
5) $\sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[3]{-2}$
6) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$

Exercice 10

Monômes. Dans cet exercice on travaille dans l'algèbre de polynômes $\mathbb{R}[x, y, z, m, a, b, u]$.

1) Trouve le coefficient, la partie littérale et le degré des monômes suivants :

$$-5x \qquad 2z^3 \qquad \frac{9}{2}y^8 \qquad -0{,}02 \qquad m^4 \qquad 3x^2yz \qquad \frac{ab}{2}$$

2) Dans la liste suivante quels sont les monômes semblables ?

$$5x \qquad 5y \qquad \frac{9}{2}y^3 \qquad xy \qquad \frac{x}{2} \qquad (xy)^2 \qquad \sqrt{2}y^3$$

3) Pour réduire une expression littérale comme $6b \cdot 3b$, il faut comprendre que la juxtaposition représente un produit, puis utiliser les propriétés de commutativité de la multiplication :

$$6b \cdot 3b = 6 \cdot b \cdot 3 \cdot b = 6 \cdot 3 \cdot b \cdot b = 18 \cdot b^2 = 18b^2$$

Fais de même dans les cas suivants :

a) $4a \cdot 3$
b) $12x \cdot 2x$
c) $z \cdot u$
d) $4z \cdot 1{,}5 \cdot 2z$
e) $-10x \cdot (-10x) \cdot (-10)$
f) $y \cdot y \cdot 4z$

Exercice 11

Carrés magiques. On dit qu'un carré est *magique* si la somme des termes de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales donne la même réponse.

59.

Ces carrés sont-ils magiques pour l'addition ?

x	$3x - 2$	$2x + 2$
$3x + 2$	$2x$	$x - 2$
$2x - 2$	$x + 2$	$3x$

x	12	$2x$
$2x + 4$	$x + 3$	5
8	$2x - 3$	$x + 7$

Les carrés suivants sont-ils magiques pour la multiplication ?

x^2	x^3	x^4
x^5	x^3	x
x^2	x^3	x^4

2	$2x^2$	$x + 1$
$0{,}5x^2$	$2x$	4
$4x$	1	x^2

L'exercice suivant a un rapport étroit avec le sujet étudié, mais il est difficile !

Exercice 12 (Optionnel)

Tiré du programme PROMYS. Pour réfléchir à un problèmes proposé aux gymnasiens de plus de 15 ans pour pouvoir participer à une école d'été de mathématiques !
Si le polynôme $(x+1)^{1000}$ est développé, combien de *coefficients* sont impairs ? Combien ne sont pas divisibles par 3 ? par 5 ? Peut-on généraliser ?