Cours Euler: Série 17

17 janvier 2024

Exercice 1

NO195 Drôles de manières

Solange, Charly et Jérôme ont effectué l'opération $4^2 \cdot 4^4$, de différentes manières :

Solange	*Charly*	*Jérôme*
$2^4 \cdot 2^8$	4^6	16^3

Pourquoi obtiennent-ils le même résultat ?

NO196 Comment procéder ?

Observe ces égalités parfaitement correctes, puis note les procédures qui te permettront de trouver le résultat de n'importe quel autre calcul du même type.

Addition et soustraction

a) $5^3 + 5^2 = 150$

b) $10^4 - 10^0 = 9999$

c) $3^3 + 3^2 = 36$

d) $4^2 + 4^2 = 32$

e) $7^1 - 7^1 = 0$

f) $2^3 + 2^3 = 2^4$

Multiplication

g) $4^2 \cdot 4^3 = 4^5$

h) $6^3 \cdot 6^3 = 6^6$

i) $1^2 \cdot 1^5 = 1^7$

j) $2^3 \cdot 3^3 = 6^3$

k) $7^1 \cdot 7^1 = 7^2$

l) $10^4 \cdot 10^3 = 10^7$

m) $5^2 \cdot 3^2 = 15^2$

n) $3^3 \cdot 3^2 = 3^5$

Division

o) $3^6 : 3^2 = 3^4$

p) $6^4 : 6^4 = 6^0$

q) $7^4 : 7^2 = 7^2$

r) $10^6 : 10^4 = 10^2$

s) $\frac{5^3}{4^3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$

t) $1^6 : 1^3 = 1^3$

u) $2^5 : 2^3 = 2^2$

v) $10^4 : 10^3 = 10^1$

Elévation à une puissance

w) $(3^2)^3 = 3^6$

x) $(10^2)^5 = 10^{10}$

y) $(6^3)^2 = 6^6$

z) $(5^4)^2 = 5^8$

NO197 Applique-les !

Donne la réponse sous la forme d'une puissance (a^n) chaque fois que c'est possible ; sinon, effectue.

a) $2^2 \cdot 2^5$

b) $4^4 \cdot 4^2$

c) $3^3 + 3^3$

d) $10^0 : 10^0$

e) $10^6 - 10^2$

f) $7^3 - 6^3$

g) $(5^1)^2$

h) $5^2 \cdot 2^2$

i) $2^7 - 2^3$

j) $10^6 : 10^2$

k) 2^{2^3}

l) $2^{(2^3)}$

m) $2^2 + 2^5$

n) $(10^3)^2$

o) $\frac{10^3}{10^6}$

p) $10^3 \cdot 10^2$

q) $\frac{2^2}{3^2}$

r) $3^3 \cdot 4^2$

Exercice 2

NO198 Réglementaire ?

Ces égalités sont-elles correctes ? Corrige celles que tu estimes fausses.

a) $3^6 \cdot 3^4 \stackrel{?}{=} 3^5 \cdot 3^5$

b) $6^4 \cdot 6^2 \stackrel{?}{=} 6^2 \cdot 3^5$

c) $5^3 \cdot 5^5 \stackrel{?}{=} (5^3)^2$

d) $2^2 \cdot 2^2 \stackrel{?}{=} 4^2$

e) $(6^3)^3 \stackrel{?}{=} 6^3 \cdot 6^3$

f) $7^3 + 7^4 \stackrel{?}{=} 7^7$

g) $25^3 \cdot 25^2 \stackrel{?}{=} 5^{10}$

h) $9^3 : 9 \stackrel{?}{=} 1^3$

i) $10\,000^5 \stackrel{?}{=} 10^9$

j) $4^2 + 3^2 \stackrel{?}{=} 7^2$

Exercice 3

NO206 Trouver la lettre

Remplace les lettres par des nombres pour que chaque égalité soit vraie.

a) $3^3 \cdot 3^x = 243$

b) $x^5 = 1$

c) $5^2 \cdot 5^x = 5^2$

d) $10^7 \cdot 10^x = 10^1$

e) $x^2 \cdot x^3 = 32$

f) $a^y = 16$

g) $4^5 : 4^p = 4^2$

h) $b^3 : b^0 = 216$

i) $2^2 \cdot 2^x = 2^3$

j) $4^5 : 4^3 = 4^k$

k) $(2^x)^6 = 64$

l) $(3^2 \cdot 3^1)^x = 3^6$

m) $(-7)^x = -343$

n) $(-5)^5 : (-5)^5 = x$

Exercice 4

Utilise les propriétés des puissances pour simplifier au maximum les expressions suivantes. On rappelle que la notation $\mathbb{R}_0$ signifie $\mathbb{R}^*$ avec nos conventions.

131. Calcule ($a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}_0$) :

1^re^ série

1) $2a^2 \,.\, 3a^4$
2) $(-3b^2)(-2b^3)$
3) $4a^2(-2b^2)$
4) $3a^3b^2(-5a^5b^4)$
5) $(2a^2)^3$
6) $(-3b^4)^2$
7) $(-5a^2b^3)^3$
8) $-(-2a^2b)^2$
9) $\left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^3$
10) $\left(\dfrac{-3b^3}{4}\right)^2$
11) $\left(\dfrac{-a^2}{b^5}\right)^3$
12) $-\left(-\dfrac{a}{b^4}\right)^2$

2^e^ série

1) $(-2a^2 \,.\, a^3)^2$
2) $(-3a^2b \,.\, ab^2)^3$
3) $(-4a^2b)^2(2ab)^3$
4) $(-4a^3b^3)^2 + (2a^2b^2)^3$
5) $\left(\dfrac{2a^3}{3a}\right)^2$
6) $\left(-\dfrac{3}{5}a^3\right)\cdot\left(\dfrac{25}{9}a^2\right)$
7) $(0,2\,a^2)(0,1\,a^3)^2$
8) $2a^5 - (-3a^2)^3$
9) $-\left(\dfrac{-2a^3b}{3ab^3}\right)^2$
10) $9a\left(\dfrac{4b}{6a}\right)^3$

Exercice 5

1) Démontre qu'une puissance paire (positive ou négative) d'un nombre réel est toujours un nombre positif.
2) Démontre que $\frac{1}{x^a} = (\frac{1}{x})^a$. (Montre que $(\frac{1}{x})^a$ est bien l'inverse de x^a en utilisant la définition de l'inverse et la propriété 1 des puissances entières.)
3) Démontre que $(x^a)^b = (x^b)^a$ pour tout nombre réel x non nul et tous entiers relatifs a, b.
4) Calcule $(a-b)^3$ où a et b sont des nombres réels. Justifie chaque étape du calcul en écrivant une égalité par ligne et en justifiant chaque étape.

Exercice 6

Racines (sans calculatrice).
Partie A. Dans chaque liste, trouve lequel des nombres est différent des autres :

(a) $\sqrt{60},\ \sqrt{15}\cdot\sqrt{4},\ 2\sqrt{15},\ 3\sqrt{20},\ \sqrt{12}\cdot\sqrt{5}$.

(b) $\sqrt{27},\ \sqrt{20+7},\ 3\sqrt{3},\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3},\ 3\sqrt{9}$.

(c) $\sqrt{441},\ \sqrt{49}\cdot\sqrt{9},\ 7\sqrt{9},\ \sqrt{21}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7},\ \sqrt{400}+\sqrt{1}$.

(d) $\sqrt{\dfrac{25}{64}},\ \dfrac{1}{8}\sqrt{25},\ \dfrac{5}{8},\ \dfrac{2{,}5}{6{,}4},\ \dfrac{5}{\sqrt{64}}$.

Partie B. Extraction de racines. Simplifie chaque expression au maximum. Par exemple $\sqrt{12} = \sqrt{3\cdot 4} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{4} = 2\sqrt{3}$.

(a) $\sqrt{175}$
(b) $\sqrt{300}$
(c) $\sqrt[3]{1080}$
(d) $5\sqrt{252}$
(e) $\sqrt{18}+\sqrt{32}$
(f) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$
(g) $\sqrt[3]{-125}$

Partie C. Extraction de racines. Donne la réponse sans aucun symbole de racine !

(a) $\sqrt{900}$
(b) $\sqrt{0{,}04}$
(c) $\sqrt[3]{1000000}$
(d) $\sqrt{10^6}$
(e) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$
(f) $\sqrt{0{,}25}$
(g) $\sqrt[3]{-1}$
(h) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{800}$
(i) $\sqrt{17}^2$
(j) $\sqrt{1521}$
(k) $\sqrt{81}+\sqrt{121}$
(l) $\sqrt{12}:\sqrt{3}$

Exercice 7

Les nombres a et b étant réels, énonce les conditions d'existence des expressions suivantes. Par exemple l'expression $\sqrt{-a}$ existe si $a \leq 0$.

1) $\sqrt{ab}$
2) $\sqrt{-ab}$
3) $\sqrt{-a^3b^3}$
4) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
5) $\sqrt{\dfrac{a^3}{b^2}}$
6) $\sqrt{\dfrac{ab}{b}}$
7) $\sqrt{\dfrac{-a^2}{b}}$
8) $\sqrt{-a^2b}$

Exercice 8 (Optionnel)

Besoin de se changer les idées ? Quelle est la somme des chiffres de $10^{2017} - 2017$?

Dans les exercices suivants, l'auteur utilise le mot “radicaux" pour racines.

Exercice 9

9. Simplifie les expressions suivantes en te servant des propriétés des radicaux ($a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}_0^+$, $c \in \mathbb{R}^+$) :

1) $\sqrt{a^2bc^3}$

2) $\sqrt{\frac{a^5}{b^2}c^3}$

3) $\sqrt{a^3b^3c^4}$

4) $\sqrt{a^2\frac{a^3b^4}{b^3}c^2}$

10. Simplifie les expressions suivantes après avoir précisé les conditions d'existence et sans changer celles-ci :

a. 1) $\sqrt{a^4b^2}$

2) $\sqrt{a^7b^3}$

3) $\sqrt{\frac{a^3}{b^4}}$

★ 4) $\sqrt{a^3b^4}$

Exercice 10

A l'aide des propriétés des racines carrées, rends rationnel le dénominateur des expressions suivantes. Indication : une identité remarquable sera parfois utile.

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$

4) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

5) $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

6) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

7) $\frac{19\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$

Exercice 11

Complète à l'aide des signes $\leqslant$, $<$, $=$, $>$ ou $\geqslant$ les énoncés suivants :

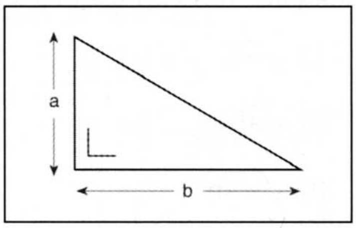
1) $\sqrt{16+9}$ ... $4+3$

2) $\sqrt{25+5}$ ... $5+\sqrt{5}$

3) $\sqrt{8+3}$ ... $\sqrt{8}+\sqrt{3}$

4) $\sqrt{a^2+b^2}$ ... $a+b$ ($a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}_0^+$)

Pour ce faire, tu peux t'aider d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont a et b pour mesure et t'inspirer de l'inégalité triangulaire•.



5) $\sqrt{a^2+0}$ ... $a+0$ ou $\sqrt{0+b^2}$ ... $0+b$ ($a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}_0^+$)

D'où si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors on a $\sqrt{a^2+b^2}$ ... $a+b$.

6) Pour a et b des nombres réels non nuls, quelles sont les relations d'égalité ($=$), de non égalité($\neq$), et d'ordre ($<, \leq$) que l'on peut éventuellement établir entre

$$\sqrt{a^2+b^2}, \quad a+b, \quad \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}, \quad |a|+|b|.$$

Exercice 12 (Optionnel)

Garam. Un type de Sudoku qui nous vient de France, tiré du blog d'Alex Bellos, The Guardian.