

Analyse I

Série de révision

Automne 2017

- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : La limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 3n} - \sqrt{n^3 + 2n^2 + 3}}{\sqrt{n + 2}}$ vaut

- $+\infty$
- -2
- -1
- 0

Question 2 : Parmi les séries numériques

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!} \qquad b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{(2n)!}$$

déterminer celles qui sont convergentes :

- uniquement $a)$ et $b)$
- uniquement $c)$
- uniquement $a)$
- toutes les trois

Question 3 : Soit la fonction $f: [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^{3x} - 1}{\sin(2x)}$.
S'il existe, soit $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ le prolongement par continuité en 0 de f .

Alors

- g existe et $g(0) = 1$
- f n'admet pas de prolongement par continuité en 0
- g existe et $g(0) = \frac{3}{2}$
- g existe et $g(0) = \frac{1}{2}$

Question 4 : La série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^4 + 2} (x + 3)^k$ converge si, et seulement si

- $x \in [-4, -2]$
- $x \in]-4, -2]$
- $x \in]2, 4[$
- $x \in [2, 4]$

Question 5 : Soit la fonction $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 \sin(e^{\sqrt{x}}) + x$. Alors

$f'(x) = \frac{3}{2}x^{3/2} e^{\sqrt{x}} \cos(e^{\sqrt{x}}) + 3x \sin(e^{\sqrt{x}}) + 1$

$f'(x) = 3x^{3/2} e^{\sqrt{x}} \cos(e^{\sqrt{x}}) + 1$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^{3/2} e^{\sqrt{x}} \cos(e^{\sqrt{x}}) + 6x \sin(e^{\sqrt{x}}) + 1$

$f'(x) = 3x^{3/2} e^{\sqrt{x}} \cos(e^{\sqrt{x}}) + 6x \sin(e^{\sqrt{x}})$

Question 6 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{|x|}$.

S'il existe, soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le prolongement par continuité en 0 de f .

f n'admet pas de prolongement par continuité en 0

g existe et $g(0) = 0$

g existe et $g(0) = -1$

g existe et $g(0) = 1$

Question 7 : Soit la fonction $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x|x-2|$. Alors

f atteint son minimum en $x = -1$, atteint son maximum en $x = 3$, admet un maximum local en $x = 1$ et admet un minimum local en $x = 2$

f atteint son maximum en $x = 3$ et admet un minimum local en $x = 1$

f atteint son minimum en $x = 1$, atteint son maximum en $x = 3$ et admet un minimum local en $x = 2$

f atteint son minimum en $x = -1$ et atteint son maximum en $x = 1$

Question 8 : Pour quels choix de $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \beta x & \text{pour } x < 2 \\ \sqrt{x^2 + 5} + \alpha & \text{pour } x \geq 2 \end{cases}$$

est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?

$\alpha = -\frac{5}{3}$ et $\beta = \frac{2}{3}$

$\alpha = 0$ et $\beta = \frac{3}{2}$

$\alpha = -\sqrt{5}$ et $\beta = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\alpha = -\frac{8}{3}$ et $\beta = \frac{1}{6}$

Question 9 : Le nombre complexe $\frac{i^{251} - e^{-i\pi}}{\sqrt{2}i - e^{i\pi/4}}$ vaut

$i\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}$

$-i\sqrt{2}$

$-(1+i)\sqrt{2}$

Question 10 : Soit une suite de nombres réels (a_n) telle que $\frac{1}{4} \leq |a_n| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 0$.
Alors

- la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge
- la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^n$ converge et $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^n \right| \leq 2$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^n$ diverge

Question 11 : L'équation $x(e^x - e^{-x}) - e^x = 0$

- n'a pas de solution appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$
- possède exactement une solution réelle
- n'a pas de solution appartenant à l'intervalle $] -\infty, 0[$
- possède au moins deux solutions réelles

Question 12 : L'intégrale $\int_0^1 \frac{x}{e^{2x}} dx$ vaut

- 1
- $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2}$
- $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2}$
- $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$

Question 13 : Soit la fonction bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{sh}(\text{sh}(x))$ et soit $a = f(1)$.
Alors la dérivée de la fonction réciproque f^{-1} de f en a vaut

- $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{\text{ch}(\text{sh}(1))}$
- $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{\text{ch}(\text{sh}(a)) \text{ch}(a)}$
- $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{\text{ch}(\text{sh}(1)) \text{ch}(1)}$
- $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{\text{ch}(\text{sh}(a)) \text{ch}(1)}$

Question 14 : La limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$ vaut

- $+\infty$
- 1
- e^{-1}
- $-e$

Question 15 : La limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{|x|} - 1 - |x|}{x^2}$

- vaut 0
- vaut 1
- vaut $\frac{1}{2}$
- n'existe pas

Question 16 : La partie imaginaire du nombre complexe $\frac{\sqrt{3}i^{99} - i}{\sqrt{5} + i}$ vaut

- $-\frac{1}{6}\sqrt{5}(1 + \sqrt{3})$
- $\frac{1}{6}(-\sqrt{3} - \sqrt{5})$
- $-\frac{1}{6}\sqrt{5}(1 + \sqrt{3})i$
- $\frac{1}{6}\sqrt{5}(1 + \sqrt{3})$

Question 17 : La limite $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x-1)(x^2-1)} \right)$

- vaut -1
- vaut $-\infty$
- vaut 0
- n'existe pas

Question 18 : L'équation $z^{-1} = \bar{z}$, où \bar{z} est le complexe conjugué de z , admet

- une infinité de solutions dans \mathbb{C}
- exactement une solution dans \mathbb{C}
- aucune solution dans \mathbb{C}
- exactement deux solutions dans \mathbb{C}

Question 19 : La limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[2]{n+3}}$ vaut

- 1
- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[2]{3}}$
- $\frac{2}{3}$
- 0

Question 20 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{(e^x - 1)}$.

Le développement limité d'ordre 2 de f autour de $x = 0$ est

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^2\epsilon(x)$

$f(x) = 2x + x^2 + x^2\epsilon(x)$

$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$

$f(x) = 1 + x + 2x^2 + x^2\epsilon(x)$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

Question 21 : L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sqrt{\text{Arctg}(x)}}{x^2 + 1} dx$ vaut

$\frac{2}{3}$

$\frac{\pi^{3/2}}{12}$

$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\frac{\pi^{3/2}}{8}$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 22 : Pour $a < b$ dans \mathbb{R} , soit une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = 0$.

VRAI FAUX

Question 23 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^x |t| dt$.
Alors $f'(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

VRAI FAUX

Question 24 : Soit une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors la dérivée de f au point $y \in I$ satisfait

$$f'(y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(y+x) - f(y)}{x}$$

VRAI FAUX

Question 25 : Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur tout \mathbb{R} . Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

VRAI FAUX

Question 26 : Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]0, 1[$. Alors la fonction $f':]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0, 1[$.

VRAI FAUX

Question 27 : Soit (a_n) une suite numérique et soit (b_n) la suite numérique définie par $b_n = |a_n|$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, alors la suite (a_n) est convergente.

VRAI FAUX

Question 28 : Soit une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui a, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x, y \in \mathbb{R}$, la propriété suivante :

$$|x - y| \leq 2\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Alors f est continue sur \mathbb{R} .

VRAI FAUX

Question 29 : Soit la suite (x_n) de nombres réels définie de manière récursive par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite de nombres réels (x_n) converge vers 2.

VRAI FAUX

Question 30 : Soit A un sous-ensemble borné et non vide de \mathbb{R} . Alors $\text{Inf } A \in A$ et $\text{Sup } A \in A$.

VRAI FAUX

Question 31 : La série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{8^k + 8^{-k}}$ est absolument convergente.

VRAI FAUX

Question 32 : La série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3 \cos(\pi k)}{k+1}$ est absolument convergente.

VRAI FAUX