Cours Euler: Corrigé 16

10 janvier 2024

Exercice 1

Nous allons montrer le résultat pour un premier p quelconque, le raisonnement pour 3 n'ayant rien de particulier.
On commence par démontrer que, pour n un nombre naturel, si p premier divise n^2, alors p divise n. C'est trivialement vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit maintenant $n \neq 0, 1$. Par le Théorème fondamental de l'arithmétique n admet une unique décomposition (à l'ordre des facteurs près) comme produit de nombres premiers : $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$. Ainsi $n^2 = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \dots \cdot p_k^2$. Comme p est premier, par unicité de la décomposition de n^2, si $p \mid n^2$, p doit faire partie des facteurs premiers de n^2 et $p = p_i$ pour un $1 \leq i \leq k$. Donc p fait partie de la décomposition de n et donc $p \mid n$. En résumé :

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et supposons que p soit premier. Alors si $p \mid n^2$, $p \mid n$.

Par l'absurde, supposons maintenant que $\sqrt{p}$ est rationnel. Alors il existe une fraction irréductible $\dfrac{a}{b} = \sqrt{p}$ avec $b \neq 0$. Quand on met au carré, on obtient

$$\frac{a^2}{b^2} = p \iff a^2 = pb^2.$$

Donc p est un diviseur de a^2, donc p est un diviseur de a par le raisonnement ci-dessus. Ainsi il existe un certain $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = pk$. Par conséquent

$$pb^2 = a^2 = (pk)^2 = p^2k^2.$$

On divise de part et d'autre par p et on voit que $b^2 = pk^2$, si bien que b^2, et donc b, est divisible par p. Mais alors les nombres b et a sont divisibles par p, ce qui contredit le fait que la fraction $\dfrac{a}{b}$ est irréductible.
Donc $\sqrt{p}$ n'est pas rationnel.

En général, $\sqrt{n}$ n'est pas irrationnel. En effet, si on prend $n = 4$, alors $\sqrt{n} = 2$ est un nombre rationnel.

Maintenant, si p et q sont des premiers distincts, alors $\sqrt{pq}$ aussi est irrationnel. Le même démonstration par l'absurde fonctionne encore. On a cependant besoin du résultat supplémentaire suivant :

Si k et l sont premiers entre eux et si $k \mid (l \cdot m)$, alors $k \mid m$.

Supposons donc par l'absurde que $\sqrt{pq}$ peut être écrit comme fraction irréductible $\frac{a}{b}$. Alors $a^2 = pqb^2$. Ceci signifie que a^2 est divisible par p, donc a aussi ; autrement dit $a = pk$ pour un certain entier naturel k. Mais alors

$$p^2k^2 = a^2 = pqb^2 \Rightarrow pk^2 = qb^2.$$

Donc p divise qb^2. Puisque p et q sont premiers entre eux, cela implique que b^2 est divisible par p, donc b aussi, contradiction !

Exercice 2

1. A. $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$, B. $\dfrac{12}{4} - 5 = \dfrac{12-20}{4} = -2$, C. $\dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$, D. $-\dfrac{12}{4} = -3$, E. $\dfrac{12}{4} \cdot 3 = 9$.
2. Seuls C. et E. sont plus grands que 1.
3. A. n'existe pas, B. $\dfrac{9}{14}$, C. infinité de solutions, D. $-34{,}3$, E. 16
4. les deux premiers sont plus grands, les trois derniers sont plus petits
5. aucun, sauf le dernier
6. A. 1, B. 0, C. 0, 1, D. 1, E. 0

Exercice 3

• Encadrement de $\sqrt{2}$. A l'unité on a bien sûr $1 < \sqrt{2} < 2$.

Au dixième : $\boxed{1,4 < \sqrt{2} < 1,5}$ car $1,4^2 = 1,96$ et $1,5^2 = 2,25$

Au centième (ie à 10^{-2}) : $\boxed{1,41 < \sqrt{2} < 1,42}$ car $1,41^2 = 1,9881$ et $1,42^2 = 2,0164$

A 10^{-3} : $\boxed{1,414 < \sqrt{2} < 1,415}$ car $1,414^2 = 1,999396$ et $1,415^2 = 2,002225$

A 10^{-4} : $\boxed{1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143}$ car $1,4142^2 = 1,99996164$ et $1,4143^2 = 2,00024449$

A 10^{-5} : $\boxed{1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422}$ car $1,41421^2 = 1,9999899241$ et $1,41422^2 = 20000182084$

A 10^{-6} : $\boxed{1,414213 < \sqrt{2} < 1,414214}$ car $1,414213^2 = 1,999998409369$ et $1,414214^2 = 2,000001237796$

• Approximation au 10000-ième de $\sqrt{3}$. A l'unité on a $1 < \sqrt{3} < 2$.

A 10^{-1} : $\boxed{1,7 < \sqrt{3} < 1,8}$ car $1,7^2 = 2,89$ et $1,8^2 = 3,24$

A 10^{-2} : $\boxed{1,73 < \sqrt{3} < 1,74}$ car $1,73^2 = 2,9929$ et $1,74^2 = 3,0276$

A 10^{-3} : $\boxed{1,732 < \sqrt{3} < 1,733}$ car $1,732^2 = 2,999824$ et $1,733^2 = 3,003289$

A 10^{-4} : $\boxed{1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321}$ car $1,7320^2 = 2,999824$ et $1,7321^2 = 3,00017041$

A 10^{-5} : $\boxed{1,73205 < \sqrt{3} < 1,73206}$ car $1,732105^2 = 2,9999972025$ et $1,732106^2 = 3,0000318436$

• Approximation de $\sqrt{9{,}7344}$. On voit que ce nombre est plus grand que 3, mais plus petit que 4. D'autre part $(3{,}1)^2 = 9{,}61$ et $(3{,}2)^2$ est plus grand que 10 si bien que

$$3{,}1 < \sqrt{9{,}7344} < 3{,}2$$

Finalement $(3{,}12)^2 = 9{,}7344$ si bien que $\sqrt{9{,}7344} = 3{,}12$. L'approximation de cette racine est une valeur exacte. Au 10000-ème on a $\sqrt{9{,}7344} = 3{,}1200$.

Exercice 4

a) 100

b) $3^2 = 9$

c) La racine carrée de 36 est 6. La racine cubique de 36 est $\sqrt[3]{36}$ (pas d'autre écriture possible).

d) $\sqrt{100} = 10$

e) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

f) car $1,2^2 = (12 \cdot 10^{-1})^2 = 144 \cdot 10^{-2} = 1,44$.

g) Non, car -16 est un nombre négatif.

h) $\sqrt{0} = 0$

i) $\sqrt[3]{1000} = 10$

j) On ne peut pas, car -4 est un nombre négatif.

k) $-\frac{5^2}{3} = -\frac{25}{3}$

l) $\sqrt{1} = 1$

m) $-\sqrt{81} = -9$

n) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

o) Le nombre dont le carré est 49^2 est 49.

Exercice 5 (Optionnel)

Un casse-tête. Par exemple $2000 = 1 \cdot 2^4 \cdot 5^3$.

Exercice 6

La première ligne est constituée des nombres $0^2 = 0^1 = 0$, puis $1^2 = 1 = 2^0$, ensuite $2^1 = 2$ et enfin $2^2 = 4$. Les autres sont données dans le tableau suivant.

Corrigé

109.

a) $10^2 = 100$

$2^{10} = 1024$

$2^2 \cdot 10 = 40$

$(10 \cdot 2)^2 = 400$

$10^2 \cdot 2^2 = 400$

$200^2 = 40'000$

$40'000 > 1024 > 400 > 100 > 40$

b) 3355

$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 225$

$3^5 = 243$

$5^3 = 125$

$3 \cdot 10^5 = 300'000$

$(5 \cdot 10)^3 = 125'000$

$300'000 > 125'000 > 3355 > 243 > 225 > 125$

c) $2 \cdot 3^4 = 162$

$34^2 = 1156$

$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$234^1 = 234$

$(2^3)^4 = 8^4 = 4096$

$2^{(3^4)} = 2^{81}$

$2^{81} > 4096 > 1156 > 234 > 162 > 24$

d) $3^3 \cdot 3^4 = 3^7$

3^{12}

3^7

$27^2 = (3^3)^2 = 3^6$

$9^3 = (3^2)^3 = 3^6$

$81^2 = (3^4)^2 = 3^8$

$3^{12} > 3^8 > 3^7 > 3^6$

e) $10^5 \cdot 10^2 = 10^7$

$10^2 \cdot 10^6 = 10^8$

$10^{(3+5)} = 10^8$

$1000^3 = (10^3)^3 = 10^9$

$100^4 = (10^2)^4 = 10^8$

$1000 \cdot 10'000 = 10^7$

$10^9 > 10^8 > 10^7$

Exercice 7

a) $1000 \cdot 1000 = 10^3 \cdot 10^3 = 10^6 = 1000000$

b) $100000 \cdot 1000 = 10^5 \cdot 10^3 = 10^8 = 100000000$

c) $10000 \cdot 0,001 = 10^4 \cdot 10^{-3} = 10$

d) $1000 \cdot 0,001 = 10^3 \cdot 10^{-3} = 10^0 = 1$

e) $0,001 \cdot 0,01 = 10^{-3} \cdot 10^{-2} = 10^{-5} = 0,00001$

f) $0,0001 \cdot 100 \cdot 0,01 = 10^{-4} \cdot 10^2 \cdot 10^{-2} = 10^{-4} = 0,0001$

g) $0,01^3 = (10^{-2})^3 = 10^{-6} = 0,000001$

h) $0,01 : 100 = 10^{-2} : 10^2 = 10^{-4} = 0,0001$

i) $100000 : 0,01 = 10^5 : 10^{-2} = 10^7 = 10000000$

j) $10 : 10000 = 10 : 10^4 = 10^{-3}$

Exercice 8

Dans cet exercice nous utiliserons la proposition sur les propriétés des fractions. Par exemple nous écrivons 3. pour faire référence à la troisième propriété dans cette proposition.

1. Soient x, y des nombres réels non nuls. Montrons que $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$, c'est-à-dire que $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$. Or,
$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} \overset{3.}{=} \frac{xy}{yx} \overset{\text{com.}}{=} \frac{xy}{xy} = (xy) \cdot (xy)^{-1} = 1.$$
2. Soient x un nombre réel et y, z deux nombres réels non nuls. Montrons que $\frac{x : z}{y : z} = \frac{x}{y}$. D'abord, remarquons que les expressions considérées sont bien définies comme y et z sont non nuls. Par définition de la fraction, $\frac{x : z}{y : z}$ est l'unique nombre réel qui multiplié avec $y : z = \frac{y}{z}$ donne $x : z$. Comme
$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \overset{3.}{=} \frac{xy}{yz},$$
il suffit de montrer que $\frac{xy}{yz} = x : z$, c'est-à-dire que $(x : z) \cdot (yz) = xy$ par la définition de la fraction. Or,
$$(x : z) \cdot (yz) = (x \cdot z^{-1}) \cdot (yz) \overset{\text{com.}}{=} (x \cdot z^{-1}) \cdot (zy) \overset{\text{asso.}}{=} \big(x \cdot (z^{-1}z)\big)\, y = xy.$$

Exercice 9

a) Le nombre de neurones est égal à $100 \cdot 10^9 = 10^{11}$.

b) Le nombre de connexions est le nombre de connexions par neurone multipliée par le nombre de neurones. Ce nombre est alors :
$$10^{11} \cdot 10^4 = 10^{15}$$

c) Si $50 \cdot 10^3$ neurones disparaissent par jour, il y en a $365 \cdot 50 \cdot 10^3 = 18250 \cdot 10^3$ qui disparaissent chaque année. On se demande donc quel est le nombre d'années n qui vérifie $n \cdot 18250 \cdot 10^3 = 10^{11}$. On peut simplifier par 10^4 pour trouver l'équation équivalente
$$n \cdot 1825 = 10^7$$
Ainsi le nombre d'années n vaut $10^7 : 1825 \approx 5479$.
Si tu as 12 ans, alors il te reste $10^{11} - 5 \cdot 10^4 \cdot 365 \cdot 12 = 10^{11} - 2,19 \cdot 10^8 = 1000 \cdot 10^8 - 2,19 \cdot 10^8 = 9997,81 \cdot 10^8 \approx 10^{11}$. Ton nombre de neurones ne change pratiquement pas !

Exercice 10

Notation scientifique.

Partie A. Une calculatrice affiche, par exemple : 1. ^{10} ce qui signifie $1 \cdot 10^{10}$. Le plus grand nombre qu'on peut atteindre est, par exemple, 10^{10}. Certaines calculatrices peuvent atteindre 10^{99}.

Partie B.

(a) $2000 \cdot 0,0014 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1,4 \cdot 10^{-3} = 2,8$

(b) $0,024 \cdot 0,0011 = 2,4 \cdot 10^{-2} \cdot 1,1 \cdot 10^{-3} = 2,64 \cdot 10^{-5} = 0,0000264$

(c) $(0,07)^2 = (7 \cdot 10^{-2})^2 = 49 \cdot 10^{-4} = 4,9 \cdot 10^{-3}$=0,0049

(d) $(-21,2)^2 = 449,44 = 4,4944 \cdot 10^2$

(e) $0,0012 : 0,04 = (1,2 \cdot 10^{-3}) : (4 \cdot 10^{-2}) = 0,3 \cdot 10^{-1} = 3 \cdot 10^{-2}$=0,03

(f) $15000 : 0,005 = (1,5 \cdot 10^4) : (5 \cdot 10^{-3}) = 0,3 \cdot 10^7 = 3 \cdot 10^6$=3000000

(g) $(-250)^2(-0,01)^3 = -6,25 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6} = -6,25 \cdot 10^{-2} = -0,0625$

(h) $(0,05)^{-1} : (0,005)^{-2} = (5 \cdot 10^{-2})^{-1} : (5 \cdot 10^{-3})^{-2} = \frac{1}{5} \cdot 10^2 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 = \frac{1}{5} \cdot 10^2 \cdot 5^2 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-4}$=0,0005

Partie C. En notation scientifique :

1. 0,000 000 01 secondes = 10^{-8} secondes
2. Une année lumière est la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année. La lumière se déplace dans le vide à 300 000 km/s. Calculons la durée d'une année en secondes : une année compte 365 jours, un jour compte 24 heures, une heure compte 3600 secondes. Donc une année compte 365·24·3600=31 536 000 secondes.

   Donc une année lumière en km compte

   $$31536000 \cdot 300000 = 3,1536 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^5 = 9,4608 \cdot 10^{12}$$

   Donc 2 millions d'années lumières= $2 \cdot 10^6 \cdot 9,4608 \cdot 10^{12} = 1,89216 \cdot 10^{19}$.

Exercice 11 (Optionnel)

Le nombre de grains de blé sur la case 1 est 1, sur la case 2 : 2, sur la case 3 : 4, sur la case 4 : 8, etc... Donc le nombre de grains de blés sur la case n est 2^{n-1}. Le nombre total N de grains de blés est donc :

$$N = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

En effet on démontre que la somme des n premières puissances de 2 vaut $2^{n+1} - 1$ pour tout entier n (pour nous $n = 63$). Une démonstration formelle se fait par la méthode dite de *récurrence* que nous étudierons bientôt, nous le faisons de manière un peu plus intuitive. On commence par $n = 0$ et on constate que $2^0 = 2^1 - 1$, on vérifie aussi que $2^0 + 2^1 = 3 = 2^2 - 1$ et pour $n = 2$ que $2^0 + 2^1 + 2^2 = 7 = 2^3 - 1$. La formule a l'air correcte pour des petites valeurs de n, essayons maintenant de généraliser. Sachant que la formule est vraie pour $n = 2$, comment la prouver pour $n = 3$ sans faire tous les calculs ? On a

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^3 = (2^0 + 2^1 + 2^2) + 2^3 = 2^3 - 1 + 2^3$$

où on a utilisé le fait que la formule a été vérifiée pour $n = 2$ dans le dernier pas. Or $2^3 + 2^3 - 1 = 2 \cdot 2^3 - 1 = 2^4 - 1$. C'est aussi correct pour $n = 3$. La technique de récurrence nous dit que l'on peut ainsi passer d'un entier $n - 1$ au suivant n (le *pas de récurrence*), et ainsi prouver la formule en toute généralité. Supposons donc que la formule est vraie pour $n-1$ et regardons pour n, exactement comme nous l'avons fait pour passer de 2 à 3. Alors

$$2^0 + 2^1 + \dots 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

C'est ce que nous voulions prouver ! Donnons N en écriture canonique lorsque $n = 63$:

$$N = 18'446'744'073'709'551'615$$

Si on suppose que 100 grains ont une masse de 5 grammes, qu'un wagon mesure 10m de longueur et qu'ils contient environ 10 tonnes de blé, un train composé de tous ces wagons aurait une longueur de $9,22337 \cdot 10^{11}$ mètres. Ce train ferait donc $23'000$ fois le tour de la Terre, et mesurerait près de 2400 fois la distance Terre-Lune !

Exercice 12 (Optionnel)

Etape	1	2	3	4
Newton	3	3,125	3,139062	3,141155
Euler	3,130169	3,139785	3,1410	3,141348
Brouncker	4	2,666	3,4666	2,895