

Cours Euler: Série 17

8 janvier 2025

Exercice 1

NO211 Puissances de dix

L'opération $10000 \cdot 100$ peut s'effectuer en utilisant l'écriture des puissances de dix:

$$\begin{aligned}10000 \cdot 100 &= \\10^4 \cdot 10^2 &= \\10^{4+2} &= 10^6 = 1\,000\,000.\end{aligned}$$

Procède de la même manière pour trouver les résultats des opérations suivantes.

- a) $1000 \cdot 1000 =$
- b) $100000 \cdot 1000 =$
- c) $10000 \cdot 0,001 =$
- d) $1000 \cdot 0,001 =$
- e) $0,001 \cdot 0,01 =$
- f) $0,0001 \cdot 100 \cdot 0,01 =$
- g) $0,01^3 =$
- h) $0,01 : 100 =$
- i) $100000 : 0,01 =$
- j) $10 : 10000 =$

puissance	nombre	nom
...		
10^{24}		quadrillion
10^{21}		trilliard
10^{18}	1 000 000 000 000 000 000	trillion
10^{15}	1 000 000 000 000 000	billiard
10^{12}	1 000 000 000 000	billion
10^9	1 000 000 000	milliard
10^6	1 000 000	million
10^3	1 000	mille
10^2	100	cent
10^1	10	dix
10^0	1	un
10^{-1}	0,1	dixième
10^{-2}	0,01	centième
10^{-3}	0,001	millième
10^{-6}	0,000 001	millionième
10^{-9}	0,000 000 001	milliardième
10^{-12}	0,000 000 000 001	billionième
10^{-15}	0,000 000 000 000 001	billiardième
10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001	trillionième
10^{-21}		trilliardième
10^{-24}		quadrillionième
...		

Les calculatrices ne peuvent souvent pas afficher plus de 10 chiffres, mais elles permettent facilement de transformer les nombres de notation décimale en notation scientifique (souvent avec une touche EE ou un mode noté SCI); le mode d'affichage n'est pas forcément bien clair: «3 E 11» signifie bien $3 \cdot 10^{11}$, par exemple.

On trouve encore parfois la touche (ou le mode) ENG: cette notation, appelée «ingénieur», utilise également les puissances de dix, mais en n'en conservant que les exposants qui sont des multiples de 3 ($10^3, 10^6, 10^9, 10^{-9}, \dots$); le nombre multiplié par la puissance de dix sera ainsi supérieur ou égal à 1 et inférieur à 1000.

Par exemple: 72500 000 s'écrira $72,5 \cdot 10^6$. Cette notation permet de transformer plus facilement les unités principales (passage de nano à micro, milli, kilo, méga, etc.).

A titre indicatif, dans les pays anglo-saxons, 1 milliard se dit «one billion»!

Exercice 2

Donne la réponse au million de synapses près pour b) et au milliard de neurones près pour c).

NO213 Faites marcher vos neurones!

Notre cerveau est constitué d'environ cent milliards de neurones, chacun d'eux étant connecté à dix mille de ses semblables.

A l'aide de puissances de dix, exprime les nombres suivants.

- a) Le nombre de neurones présents dans notre cerveau.
- b) Le nombre de connexions dans ce même cerveau.
- c) A la naissance, un enfant possède tous ses neurones. En vieillissant, leur nombre diminue d'environ cinquante mille par jour. Après combien d'années (365 jours) avons-nous épuisé notre réserve?

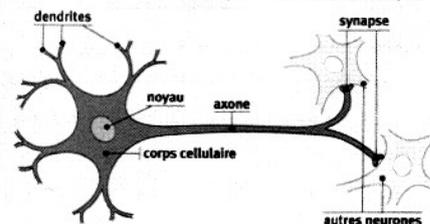
«[...] Un neurone ressemble à une pieuvre, avec des bras qui partent dans tous les sens. A partir d'un corps cellulaire central, plus ou moins sphérique, rayonnent plusieurs expansions. Il y en a de deux types. Un bras cellulaire est soit un dendrite, soit un axone. Le type de neurone le plus répandu dans le cerveau possède plusieurs dendrites, mais un seul axone. [...]

L'axone transporte l'information neuronale vers d'autres neurones du cerveau. Cela nous conduit à introduire un nouveau mot clé: la synapse. Celle-ci est la zone où l'extrémité de l'axone entre en contact avec un autre neurone.

Les contacts synaptiques sont les endroits privilégiés où l'information passe d'un neurone à l'autre. On les trouve

sur les corps cellulaires et sur les dendrites. Il n'y en a pas sur l'axone. L'information atterrit sur le neurone au niveau de son corps cellulaire et de ses dendrites. Elle en sort par l'axone. [...]

GODAUX E., Cent milliards de neurones, LEP



Exercice 3

Notation scientifique.

Partie A. Affiche un maximum de 9 sur l'écran de ta calculatrice. Ajoute 1. Que se passe-t-il? Pourquoi? Quel est le plus grand nombre que tu peux afficher avec ta calculatrice?

Partie B. Ecris chaque nombre proposé en notation scientifique, effectue ensuite et donne la réponse du calcul en notation scientifique, puis en notation décimale :

(a) $2000 \cdot 0,0014$

(d) $(-21,2)^2$

(g) $(-250)^2 \cdot (-0,001)^3$

(b) $0,024 \cdot 0,0011$

(e) $0,0012 : 0,04$

(c) $(0,07)^2$

(f) $15000 : 0,005$

(h) $(0,05)^{-1} : (0,005)^{-2}$

Partie C. Ecris les nombres qui apparaissent dans les phrases suivantes en notation scientifique :

- Certains ordinateurs exécutent une opération en 0,00000001 seconde.
- La distance de la Terre à la Nébuleuse d'Andromède est de 2 millions d'années-lumière (donne la réponse en kilomètres! Rappelons que la lumière parcourt $3 \cdot 10^5$ kilomètres par seconde).

Exercice 4

NO195 Drôles de manières

Solange, Charly et Jérôme ont effectué l'opération $4^2 \cdot 4^4$, de différentes manières :

Solange

$$2^4 \cdot 2^8$$

Charly

$$4^6$$

Jérôme

$$16^3$$

Pourquoi obtiennent-ils le même résultat ?

NO196 Comment procéder ?

Observe ces égalités parfaitement correctes, puis note les procédures qui te permettront de trouver le résultat de n'importe quel autre calcul du même type.

Addition et soustraction

a) $5^3 + 5^2 = 150$

c) $3^3 + 3^2 = 36$

e) $7^1 - 7^1 = 0$

b) $10^4 - 10^0 = 9999$

d) $4^2 + 4^2 = 32$

f) $2^3 + 2^3 = 2^4$

Multiplication

g) $4^2 \cdot 4^3 = 4^5$

j) $2^3 \cdot 3^3 = 6^3$

m) $5^2 \cdot 3^2 = 15^2$

h) $6^3 \cdot 6^3 = 6^6$

k) $7^1 \cdot 7^1 = 7^2$

n) $3^3 \cdot 3^2 = 3^5$

i) $1^2 \cdot 1^5 = 1^7$

l) $10^4 \cdot 10^3 = 10^7$

Division

o) $3^6 : 3^2 = 3^4$

r) $10^6 : 10^4 = 10^2$

u) $2^5 : 2^3 = 2^2$

p) $6^4 : 6^4 = 6^0$

s) $\frac{5^3}{4^3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$

v) $10^4 : 10^3 = 10^1$

q) $7^4 : 7^2 = 7^2$

t) $1^6 : 1^3 = 1^3$

Elévation à une puissance

w) $(3^2)^3 = 3^6$

x) $(10^2)^5 = 10^{10}$

y) $(6^3)^2 = 6^6$

z) $(5^4)^2 = 5^8$

NO197 Applique-les!

Donne la réponse sous la forme d'une puissance (a^n) chaque fois que c'est possible; sinon, effectue.

- | | | | |
|--------------------|--------------------|----------------|------------------------|
| a) $2^2 \cdot 2^5$ | f) $7^3 - 6^3$ | k) 2^{2^3} | o) $\frac{10^3}{10^6}$ |
| b) $4^4 \cdot 4^2$ | g) $(5^1)^2$ | l) $2^{(2^3)}$ | p) $10^3 \cdot 10^2$ |
| c) $3^3 + 3^3$ | h) $5^2 \cdot 2^2$ | m) $2^2 + 2^5$ | q) $\frac{2^2}{3^2}$ |
| d) $10^0 : 10^0$ | i) $2^7 - 2^3$ | n) $(10^3)^2$ | r) $3^3 \cdot 4^2$ |
| e) $10^6 - 10^2$ | j) $10^6 : 10^2$ | | |

Exercice 5

NO198 Réglementaire?

Ces égalités sont-elles correctes? Corrige celles que tu estimes fausses.

- | | |
|--|-------|
| a) $3^6 \cdot 3^4 \stackrel{?}{=} 3^5 \cdot 3^5$ | |
| b) $6^4 \cdot 6^2 \stackrel{?}{=} 6^2 \cdot 3^5$ | |
| c) $5^3 \cdot 5^5 \stackrel{?}{=} (5^3)^2$ | |
| d) $2^2 \cdot 2^2 \stackrel{?}{=} 4^2$ | |
| e) $(6^3)^3 \stackrel{?}{=} 6^3 \cdot 6^3$ | |
| f) $7^3 + 7^4 \stackrel{?}{=} 7^7$ | |
| g) $25^3 \cdot 25^2 \stackrel{?}{=} 5^{10}$ | |
| h) $9^3 : 9 \stackrel{?}{=} 1^3$ | |
| i) $10\,000^5 \stackrel{?}{=} 10^9$ | |
| j) $4^2 + 3^2 \stackrel{?}{=} 7^2$ | |

Exercice 6

NO206 Trouver la lettre

Remplace les lettres par des nombres pour que chaque égalité soit vraie.

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------|------------------------------|
| a) $3^3 \cdot 3^x = 243$ | f) $a^y = 16$ | k) $(2^x)^6 = 64$ |
| b) $x^5 = 1$ | g) $4^5 : 4^p = 4^2$ | l) $(3^2 \cdot 3^1)^x = 3^6$ |
| c) $5^2 \cdot 5^x = 5^2$ | h) $b^3 : b^0 = 216$ | m) $(-7)^x = -343$ |
| d) $10^7 \cdot 10^x = 10^1$ | i) $2^2 \cdot 2^x = 2^3$ | n) $(-5)^5 : (-5)^5 = x$ |
| e) $x^2 \cdot x^3 = 32$ | j) $4^5 : 4^3 = 4^k$ | |

Exercice 7

Utilise les propriétés des puissances pour simplifier au maximum les expressions suivantes. On rappelle que la notation \mathbb{R}_0 signifie \mathbb{R}^* avec nos conventions.

131. Calcule ($a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R}_0$) :

1^{re} série

1) $2a^2 \cdot 3a^4$

7) $(-5a^2b^3)^3$

2) $(-3b^2)(-2b^3)$

8) $-(-2a^2b)^2$

3) $4a^2(-2b^2)$

9) $\left(\frac{1}{2a^2}\right)^3$

4) $3a^3b^2(-5a^5b^4)$

10) $\left(\frac{-3b^3}{4}\right)^2$

5) $(2a^2)^3$

11) $\left(\frac{-a^2}{b^5}\right)^3$

6) $(-3b^4)^2$

12) $- \left(-\frac{a}{b^4}\right)^2$

2^e série

1) $(-2a^2 \cdot a^3)^2$

6) $\left(-\frac{3}{5}a^3\right) \cdot \left(\frac{25}{9}a^2\right)$

2) $(-3a^2b \cdot ab^2)^3$

7) $(0,2a^2)(0,1a^3)^2$

3) $(-4a^2b)^2(2ab)^3$

8) $2a^5 - (-3a^2)^3$

4) $(-4a^3b^3)^2 + (2a^2b^2)^3$

9) $- \left(\frac{-2a^3b}{3ab^3}\right)^2$

5) $\left(\frac{2a^3}{3a}\right)^2$

10) $9a \left(\frac{4b}{6a}\right)^3$

Exercice 8

- Démontre qu'une puissance paire (positive ou négative) d'un nombre réel est toujours un nombre positif.
- Démontre que $\frac{1}{x^a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a$. (Montre que $\left(\frac{1}{x}\right)^a$ est bien l'inverse de x^a en utilisant la définition de l'inverse et la propriété 1 des puissances entières.)
- Démontre que $(x^a)^b = (x^b)^a$ pour tout nombre réel x non nul et tous entiers relatifs a, b .
- Calcule $(a - b)^3$ où a et b sont des nombres réels. Justifie chaque étape du calcul en écrivant une égalité par ligne et en justifiant chaque étape.

Exercice 9**Racines (sans calculatrice).****Partie A.** Dans chaque liste, trouve lequel des nombres est différent des autres :

(a) $\sqrt{60}$, $\sqrt{15} \cdot \sqrt{4}$, $2\sqrt{15}$, $3\sqrt{20}$, $\sqrt{12} \cdot \sqrt{5}$.

(b) $\sqrt{27}$, $\sqrt{20+7}$, $3\sqrt{3}$, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$, $3\sqrt{9}$.

(c) $\sqrt{441}$, $\sqrt{49} \cdot \sqrt{9}$, $7\sqrt{9}$, $\sqrt{21} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$, $\sqrt{400} + \sqrt{1}$.

(d) $\sqrt{\frac{25}{64}}$, $\frac{1}{8}\sqrt{25}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2,5}{6,4}$, $\frac{5}{\sqrt{64}}$.

Partie B. Extraction de racines. Simplifie chaque expression au maximum. Par exemple $\sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$.

(a) $\sqrt{175}$

(d) $5\sqrt{252}$

(g) $\sqrt[3]{-125}$

(b) $\sqrt{300}$

(e) $\sqrt{18} + \sqrt{32}$

(c) $\sqrt[3]{1080}$

(f) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

Partie C. Extraction de racines. Donne la réponse sans aucun symbole de racine !

(a) $\sqrt{900}$

(e) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

(i) $\sqrt{17^2}$

(b) $\sqrt{0,04}$

(f) $\sqrt{0,25}$

(j) $\sqrt{1521}$

(c) $\sqrt[3]{1000000}$

(g) $\sqrt[3]{-1}$

(k) $\sqrt{81} + \sqrt{121}$

(d) $\sqrt{10^6}$

(h) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{800}$

(l) $\sqrt{12} : \sqrt{3}$

Exercice 10Les nombres a et b étant réels, énonce les conditions d'existence des expressions suivantes. Par exemple l'expression $\sqrt{-a}$ existe si $a \leq 0$.

1) \sqrt{ab}

4) $\sqrt{\frac{a}{b}}$

6) $\sqrt{\frac{ab}{b}}$

8) $\sqrt{-a^2b}$

2) $\sqrt{-ab}$

5) $\sqrt{\frac{a^3}{b^2}}$

7) $\sqrt{\frac{-a^2}{b}}$

3) $\sqrt{-a^3b^3}$

Exercice 11 (Optionnel)**Besoin de se changer les idées ?** Quelle est la somme des chiffres de $10^{2017} - 2017$?

