Examen final - Salle AAC231 - 16h15 à 19h15

Nom: .... **Prénom:** .... **Section:** ....

- Vous pouvez répondre aux questions en francais ou en anglais.
- Ecrivez votre nom sur chaque feuille double; rendez la donnée avec votre copie SVP.

Problème 1: Quiz (20 points). Répondez par Vrai ou Faux (en entourant la réponse correcte) et écrivez une ligne de justification pour chaque réponse. Tous les points sont attribués si la réponse et la justification sont correctes et aucun point si la justification est fausse.

1) La matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ est une opération de $\mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$ permise par les principes quantiques:

Vrai / Faux, Justification: ....

2) Les 4 états $\frac{1}{\sqrt{5}}(|00\rangle + 2i|11\rangle)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(2i|00\rangle + |11\rangle)$ *ne peuvent pas* être clonés (copiés) par une machine unitaire unique:

Vrai / Faux, Justification: ....

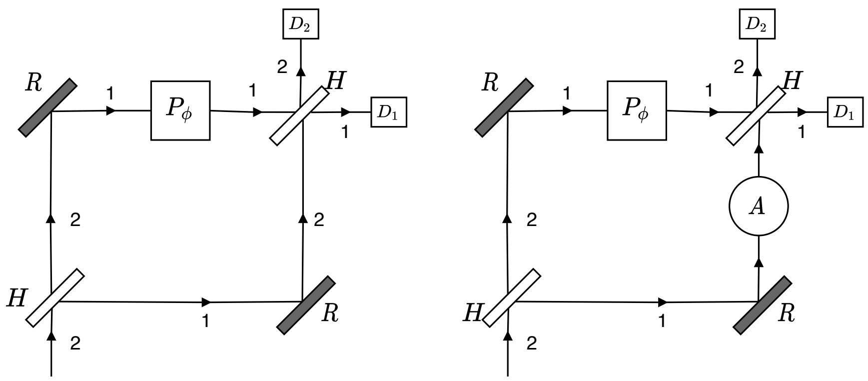
3) Deux vecteurs orthogonaux sur la sphère de Bloch sont aussi orthogonaux dans l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^2$:

Vrai / Faux, Justification: ....

4) Alice and Bob partagent l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Alice effectue une mesure dans la base $|0\rangle, |1\rangle$ et observe son qubit dans l'état $|1\rangle$. Bob effectue une mesure après celle d'Alice dans une base générale $|\alpha\rangle, |\alpha_\perp\rangle$. Bob observe que son qubit est nécessairement dans l'état $|1\rangle$ à cause de l'intrication (entanglement):

Vrai / Faux, Justification: ....

Problème 2: Interféromètre (30 points). Considérez un photon qui suit les trajectoires de direction 1 et 2 sur les figures ci-dessous. L'espace de Hilbert est ici $\mathbb{C}^3$ et possède la base orthonormée $|0|\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$. Les états $|1\rangle$, $|2\rangle$ correspondent aux deux directions de propagation et l'état $|0\rangle$ correspond à un état où le photon est absorbé par un atome.



Les miroirs semitransparents sont modélisés par $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et les miroirs parfaitement réfléchissant par $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'opération $P_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ représente un déphaseur. Dans l'interféromètre de droite il y a en plus un atome qui peut absorber et émettre le photon. Ce processus d'absorption-émission est modélisés par la matrice *unitaire* $A = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & \sqrt{1-\epsilon^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ X & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$. Dans toutes ces matrices les lignes et les colonnes correspondent aux états $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ (dans le même ordre).

a) Condidérez d'abord *l'interféromètre de gauche*. L'état entrant est $|2\rangle$. Calculez l'état du photon à la sortie juste avant les photodétecteurs D_1 et D_2.

b) Pour *l'interféromètre de gauche*: calculez les probabilités de détection dans D_1 et D_2. Lors d'une expérience unique avec un photon d'énergie $h\nu$: quelles sont les énergies possibles recues par D_1 ?

c) Condidérez maintenant *l'interféromètre de droite*. Que vaut X (en fonction de ϵ) dans la matrice A ?

d) Toujours pour *l'interféromètre de droite* avec l'état entrant $|2\rangle$: calculez l'état du photon sortant, ainsi que les probablités de détection dans D_1 et D_2 et d'absorption par l'atome.

Problème 3: Intrication (20 points). Alice est en orbite dans la station spatiale internationale, Bob est sur la lune et Charlie dans une fusée en route pour mars. La terre leur distribue les trois qubits A, B, C dans l'état $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$. Alice possède un qubit supplémentaire dans l'état $|\Phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

a) Quel est l'espace de Hilbert et l'état du système total.

Alice effectue une mesure dans la base de Bell. Nous rappelons ici que cette base est constituée des 4 états: $|B_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, $|B_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, $|B_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, $|B_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$.

b) Quels sont les résultats possible de la mesure pour l'état global (total)? En particulier est ce que l'état partagé par Bob et Charlie est intriqué ?

c) En vous inspirant du protocole de téléportation vu en cours, décrivez un protocole qui assure que Bob et Charlie partagent finalement l'état $\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ ou bien l'état $\alpha|00\rangle - \beta|11\rangle$. En particulier quel est le nombre minimum de *bits classiques* que Alice doit transmettre à Bob et Charlie ?

Problème 4: Spin et matrice densité (30 points). On considère l'hamiltonien d'un moment magnétique (un spin) $H = -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$ où $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\hbar$ la constante de Planck et ω la fréquence de Larmor. L'état initial du spin est $|\psi_0\rangle = (\cos\frac{\theta}{2})|\uparrow\rangle + (\sin\frac{\theta}{2})e^{i\phi}|\downarrow\rangle$.

a) Calculez l'évolution temporelle de l'état, c'est à dire l'état à l'instant t: $|\psi_t\rangle$ et faites un dessin de sa trajectoire sur la sphère de Bloch.

b) Calculez la valeur moyenne de l'énergie au cours du temps, c.a.d $E(t,\theta,\phi) \equiv \langle\psi_t|H|\psi_t\rangle$. Que vaut-elle pour $\theta = 0, \pi/2, \pi$? Calculez la variance de l'énergie $\langle\psi_t|H^2|\psi_t\rangle - (\langle\psi_t|H|\psi_t\rangle)^2$ et déterminez pour quelles valeurs de θ cette variance est nulle.

Supposons que le spin soit initialement dans un état mixte décrit par la matrice densité $\rho_0 = \frac{1}{2}(I + \vec{a}\cdot\vec{\sigma})$ avec $\vec{a} = (a_x, 0, a_z)$, $a_x^2 + a_z^2 \leq 1$ et $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. On rappelle $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Calculez la matrice densité au temps t: $\rho_t = U_t\rho_0 U_t^\dagger$ où U_t est la matrice d'évolution temporelle correspondant à l'hamiltonien $H = -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$.

d) Représentez la trajectoire de la matrice densité ρ_t, $t \geq 0$ dans la boule de Bloch quand $\vec{a} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

e) Calculez l'énergie moyenne au cours du temps: $E(t,\vec{a}) \equiv \mathrm{Tr}(H\rho_t)$ pour $\vec{a} = (a_x, 0, a_z)$. Calculez également la variance $\mathrm{Tr}(H^2\rho_t) - (\mathrm{Tr}H\rho_t)^2$ et déterminez pour quelles valeurs de $\vec{a}$ celle-ci est nulle.