

Analyse I – Série 13 - bis

Quelques derniers exercices sur les intégrales généralisées...

Exercice 1. (Intégrales généralisées)

Calculer - si elles convergent - les intégrales généralisées suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx & \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+1} dx & \text{c) } \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx \\ \text{d) } \int_0^1 \text{Log } x dx & \text{e) } \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx & \text{f) } \int_0^1 \sin(\text{Log } x) dx \end{array}$$

Sol.:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\text{Arctg } x \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

car $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Arctg } x = \frac{\pi}{2}$ *et* $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctg } x = -\frac{\pi}{2}$.

b) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ *et donc* $\frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x-1)^2}$. *Le problème n'est pas en* $\pm\infty$ *mais en* $x=1$. *On a donc*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx &= \int_{-\infty}^1 \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{x-1} \right]_{-\infty}^1 + \left[-\frac{1}{x-1} \right]_1^{\infty}. \end{aligned}$$

Aucune des 2 intégrales ne converge (en $x=1$ *).*

c)

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = 2\sqrt{x-1} \Big|_1^2 = 2 - 0 = 2.$$

$$\text{d) } \int_0^1 \text{Log } x dx = \left[x \text{Log } x - x \right]_{0^+}^1 = -1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} x \text{Log } x = 0$$

e) *on pose* $u = \sqrt{x}$ *ce qui donne* $x = u^2$ *et* $dx = 2u du$ *et on intègre par parties. Alors*

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} 2ue^{-u} du = \left[-2ue^{-u} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -2e^{-u} du = 0 - \left[2e^{-u} \right]_0^{\infty} = 2$$

On a utilisé que $\lim_{u \rightarrow \infty} ue^{-u} = 0$ *et* $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-u} = 0$.

f) *On pose* $x = e^t$ *et alors* $dx = e^t dt$. *Notons que si* $x = 0^+$ *alors* $t \rightarrow -\infty$ *et si* $x = 1$ *alors* $t = 0$. *On obtient*

$$\int_0^1 \sin(\text{Log } x) dx = \int_{-\infty}^0 \sin(t)e^t dt$$

En intégrant 2 fois par parties, on trouve que

$$\int \sin(t)e^t dt = \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C.$$

Alors

$$\int_{-\infty}^0 \sin(t)e^t dt = \left[\frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{2}e^0(\sin 0 - \cos 0) = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 2. (Intégrales généralisées)

Calculer les intégrales généralisées suivantes, si elles convergent.

a) $I = \int_{0+}^1 \frac{1}{x^p} dx, p \in \mathbb{R}$

b) $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx, p \in \mathbb{R}$

c) $I = \int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

d) $I = \int_{0+}^{1/2} \frac{1}{x \operatorname{Log}(x)} dx$

e) $I = \int_e^{\infty} \frac{\operatorname{Log}^2(x)}{x^2} dx$

f) $I = \int_{1+}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$

g) $I = \int_0^{\infty} \sin(x) e^{-x} dx$

h) $I = \int_{0+}^{\infty} e^{-x}(1-x) \operatorname{Log}(x) dx$

Sol.:

a) Nous avons ici une intégrale de type 1. Pour $p \neq 1$ posons

$$\mathcal{I}_{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^p} dx$$

On a pour $p \neq 1$:

$$\mathcal{I}_{\varepsilon} = \left[\frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}} \right]_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{1-p} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \right)$$

Si $p - 1 < 0$, on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} = 0$.

Et donc

$$\mathcal{I} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{I}_{\varepsilon} = \frac{1}{1-p}$$

Si $p - 1 > 0$ la limite vaut $+\infty$ et l'intégrale est divergente.

Si $p = 1$, on a

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \operatorname{Log}(1) - \operatorname{Log}(\varepsilon) = -\operatorname{Log}(\varepsilon).$$

Or $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \operatorname{Log}(\varepsilon) = -\infty$, et l'intégral est divergente.

Finalement, l'intégrale est convergente si et seulement si $p < 1$.

b) Nous avons ici une intégrale de type 2.

Posons

$$\mathcal{I}_R = \int_1^R \frac{1}{x^p} dx$$

On a pour $p \neq 1$:

$$\mathcal{I}_R = \left[\frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}} \right]_1^R = \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{R^{p-1}} \right)$$

Si $p - 1 > 0$ on a $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R^{p-1}} = 0$.

Et donc

$$\mathcal{I} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_R = \frac{1}{p-1}$$

Si $p - 1 < 0$, la limite vaut $+\infty$ et l'intégrale est divergente.

Si $p = 1$ on a

$$\int_1^R \frac{1}{x} dx = \text{Log}(R) - \text{Log}(1) = \text{Log}(R).$$

Or $\lim_{R \rightarrow \infty} \text{Log}(R) = \infty$, et l'intégrale est divergente.

Finalement, l'intégrale est convergente si et seulement si $p > 1$.

c) Nous avons ici une intégrale de type 1.

Posons

$$\mathcal{I}_{1-\varepsilon} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\text{Arcsin}(x)]_0^{1-\varepsilon} = \text{Arcsin}(1-\varepsilon)$$

Et donc

$$\mathcal{I} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{I}_{1-\varepsilon} = \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$$

Car la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ est continue sur $[-1, 1]$.

d) Posons

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \text{Log}(x)} dx$$

Opérons le changement de variable suivant : $t = \text{Log}(x)$ et donc $dt = \frac{1}{x} dx$. $x = \varepsilon \implies t = \text{Log}(\varepsilon)$ et $x = \frac{1}{2} \implies t = -\text{Log}(2)$.

Ainsi,

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \int_{\text{Log}(\varepsilon)}^{-\text{Log}(2)} \frac{1}{t} dt = [\text{Log}|t|]_{\text{Log}(\varepsilon)}^{-\text{Log}(2)} = \text{Log}(\text{Log}(2)) - \text{Log}|\text{Log}(\varepsilon)|$$

Or

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Log}|\text{Log}(\varepsilon)| = +\infty$$

Donc \mathcal{I} est une intégrale divergente.

e) C'est une intégrale généralisée de type 2 qui est définie par la limite

$$I = \int_e^\infty \frac{\text{Log}^2(x)}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_e^R \frac{\text{Log}^2(x)}{x^2} dx.$$

On intègre dans l'intégrale de droite par parties avec $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ [$\implies f(x) = -\frac{1}{x}$] et $g(x) = \text{Log}^2(x)$ [$\implies g'(x) = 2 \text{Log}(x) \frac{1}{x}$]

$$\begin{aligned} \int_e^R \frac{\text{Log}^2(x)}{x^2} dx &= \left[-\frac{1}{x} \text{Log}^2(x) \right]_e^R - \int_e^R \left(-\frac{1}{x} \right) \frac{2 \text{Log}(x)}{x} dx \\ &= -\frac{1}{R} \text{Log}^2(R) + \frac{1}{e} + \int_e^R \frac{2 \text{Log}(x)}{x^2} dx \end{aligned}$$

On intègre par partie encore une fois avec $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ [$\implies f(x) = -\frac{1}{x}$] et $g(x) = 2 \text{Log}(x)$ [$\implies g'(x) = \frac{2}{x}$]

$$\begin{aligned} \int_e^R \frac{2 \text{Log}(x)}{x^2} dx &= \left[-\frac{2}{x} \text{Log}(x) \right]_e^R - \int_e^R \left(-\frac{1}{x} \right) \frac{2}{x} dx \\ &= -\frac{2}{R} \text{Log}(R) + \frac{2}{e} + \int_e^R \frac{2}{x^2} dx \\ &= -\frac{2}{R} \text{Log}(R) + \frac{2}{e} - \frac{2}{R} + \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Pour l'intégrale généralisée I on trouve donc

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_e^R \frac{\text{Log}^2(x)}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{R} \text{Log}^2(R) + \frac{1}{e} - \frac{2}{R} \text{Log}(R) + \frac{2}{e} - \frac{2}{R} + \frac{2}{e} \right) = \frac{5}{e},$$

où on a utilisé Bernoulli-l'Hospital pour calculer les limites

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{R} \text{Log}(R) \right) = - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}(R)}{R} = - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{R}}{1} = - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} = 0.$$

et

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{R} \text{Log}^2(R) \right) = - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2 \text{Log}(R) \frac{1}{R}}{1} = - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2 \text{Log}(R)}{R} = 0.$$

f) C'est une intégrale généralisée de type 1 qui s'écrit

$$I = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{1+\delta}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx.$$

Pour calculer l'intégrale à droite, on pose le changement de variable $x = \varphi(u) = u^2 + 1$, $\varphi'(u) = 2u$ et on écrit $\delta = \varepsilon^2$ avec $\varepsilon > 0$ pour simplifier la notation. Comme x varie entre $1 + \varepsilon^2 = \varphi(\varepsilon)$ et $2 = \varphi(1)$, on a

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon^2}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(u)}{\sqrt{\varphi(u)-1}} \varphi'(u) du \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{u^2+1}{\sqrt{u^2}} 2u du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 2(u^2+1) du \\ &= 2 \int_0^1 (u^2+1) du \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}u^3 + u \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Notez qu'on a pu enlever la limite parce que l'expression en u est (dans ce cas, pas de manière générale) bien définie aux nouvelles bornes.

g) Il s'agit d'une intégrale généralisée de type 2 qui est définie par la limite

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sin(x) e^{-x} dx.$$

On intègre par parties avec $f'(x) = e^{-x}$ [$\Rightarrow f(x) = -e^{-x}$] et $g(x) = \sin(x)$ [$\Rightarrow g'(x) = \cos(x)$]. On obtient

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sin(x) e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\sin(x) e^{-x} \right]_0^R + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos(x) e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\sin(R) e^{-R} \right) + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos(x) e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos(x) e^{-x} dx \end{aligned}$$

car $\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\sin(R) e^{-R} \right) = 0$. En effet, on a $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R} = 0$ et $-1 \leq \sin(R) \leq 1$, ce qui permet de conclure par le théorème des deux gendarmes.

On intègre une deuxième fois par parties avec $f'(x) = e^{-x}$ et $g(x) = \cos(x)$ [$\Rightarrow g'(x) = -\sin(x)$] pour obtenir

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\cos(x) e^{-x} \right]_0^R - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sin(x) e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\cos(R) e^{-R} + 1 \right) - I \\ &= 1 - I \end{aligned}$$

car $\lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\cos(R) e^{-R} \right) = 0$ (conclusion par le théorème des deux gendarmes comme ci-dessus).

On a donc $I = 1 - I$, ou

$$I = \frac{1}{2}.$$

h) Cette intégrale de type 3 est définie par la limite

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon, R}$$

avec

$$I_{\varepsilon, R} = \int_{\varepsilon}^R e^{-x} (1-x) \operatorname{Log}(x) dx.$$

On intègre par parties avec $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ et $g(x) = \operatorname{Log}(x)$ [$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$]. Pour trouver $f(x)$ qui est une primitive de $f'(x)$, on intègre aussi par parties avec $u'(x) = e^{-x}$ [$\Rightarrow u(x) = -e^{-x}$] et $v(x) = 1-x$ [$\Rightarrow v'(x) = -1$]. Ainsi on obtient

$$f(x) = \int e^{-x}(1-x) dx = -e^{-x}(1-x) - \int (-e^{-x})(-1) dx = x e^{-x}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon, R} &= \left[x e^{-x} \operatorname{Log}(x) \right]_{\varepsilon}^R - \int_{\varepsilon}^R x e^{-x} \frac{1}{x} dx = R e^{-R} \operatorname{Log}(R) - \varepsilon e^{-\varepsilon} \operatorname{Log}(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^R e^{-x} dx \\ &= R e^{-R} \operatorname{Log}(R) - \varepsilon e^{-\varepsilon} \operatorname{Log}(\varepsilon) - \left[-e^{-x} \right]_{\varepsilon}^R = R e^{-R} \operatorname{Log}(R) - \varepsilon e^{-\varepsilon} \operatorname{Log}(\varepsilon) + e^{-R} - e^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \operatorname{Log}(\varepsilon)) = 0$ (Bernoulli-l'Hospital) on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon, R} = R e^{-R} \operatorname{Log}(R) + e^{-R} - 1$$

et puisque

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R e^{-R} \operatorname{Log}(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R \operatorname{Log}(R)}{e^R} = 0$$

par Bernoulli-l'Hospital, on a finalement

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon, R} = -1.$$