















Ens. : Analyse I  
Analyse I - MA  
Automne 2022  
Durée : 1 heures

# Student One

SCIPER : 111111

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - +3 points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
     		

Question 1:



Soit la fonction  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin(2\pi x) + x$ . Soient  $p_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, 3$  les polynômes de Taylor d'ordre 1 de  $f$ , en  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 1$  et  $x_3 = \frac{3}{2}$ , respectivement et  $P(x)$  la fonction définie par morceaux :

$$P(x) = \begin{cases} p_0(x) & x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ p_1(x) & x \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ p_2(x) & x \in [1, \frac{3}{2}[ \\ p_3(x) & x \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases}$$

- 1) Donner les polynômes  $p_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, 3$ .
- 2) La fonction  $P$  est-elle continue sur  $[0, 2]$  ? Si non, trouver les points de discontinuité de  $P$ .
- 3) Démontrer que  $|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^2}{2}$  pour tout  $x \in [0, 2]$ .

**Solution :** Soit la fonction  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin(2\pi x) + x$ . Soient  $p_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, 3$  les polynômes de Taylor d'ordre 1 de  $f$ , en  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 1$  et  $x_3 = \frac{3}{2}$ , respectivement et  $P(x)$  la fonction définie par morceaux :

$$P(x) = \begin{cases} p_0(x) & x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ p_1(x) & x \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ p_2(x) & x \in [1, \frac{3}{2}[ \\ p_3(x) & x \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases}$$

**Rappel:** Pour  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en  $x_i \in D$ , le polynôme de Taylor d'ordre  $n$  en  $x_i$  est

$$f_n(x) = \sum_{n=0}^n \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!} (x - x_i)^n.$$

(à distinguer de la série de Taylor)  

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!} (x - x_i)^n$$

- (a) On donne explicitement les polynômes  $p_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, 3$ . Le polynôme de Taylor  $p_i(x)$  d'ordre 1 de  $f(x) = \sin(2\pi x) + x$  en  $x_i$  est

$$\begin{aligned} p_i(x) &= \sum_{n=0}^1 f^{(n)}(x_i) (x - x_i)^n \\ &= f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) \\ &= \sin(2\pi x_i) + x_i + (2\pi \cos(2\pi x_i) + 1)(x - x_i). \end{aligned}$$

(a) En  $x_0 = 0$ :

$$p_0(x) = \sin(0) + 0 + (2\pi \cos(0) + 1)(x - 0) = (2\pi + 1)x$$

(b) En  $x_1 = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \sin(\pi) + \frac{1}{2} + (2\pi \cos(\pi) + 1)(x - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2} + (1 - 2\pi)(x - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

(c) En  $x_2 = 1$ :

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \sin(2\pi) + 1 + (2\pi \cos(2\pi) + 1)(x - 1) \\ &= 1 + (1 + 2\pi)(x - 1) \end{aligned}$$

(d) En  $x_3 = \frac{3}{2}$ :

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \sin(3\pi) + \frac{3}{2} + (2\pi \cos(3\pi) + 1)(x - \frac{3}{2}) \\ &= \frac{3}{2} + (1 - 2\pi)(x - \frac{3}{2}) \end{aligned}$$



(b) On remplace les polynômes du point 1 dans la définition de  $P$ :

$$P(x) = \begin{cases} (2\pi + 1)x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ \frac{1}{2} + (1 - 2\pi)(x - \frac{1}{2}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ 1 + (1 + 2\pi)(x - 1) & \text{si } x \in [1, \frac{3}{2}[ \\ \frac{3}{2} + (1 - 2\pi)(x - \frac{3}{2}) & \text{si } x \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases}$$

La fonction  $P$  est continue par morceaux (puisque chaque morceau est un polynôme). Il faut donc vérifier la continuité aux points  $x_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

(a) En  $x_1 = \frac{1}{2}$ :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} P(x) = \frac{2\pi + 1}{2} \neq \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} P(x)$$

Donc  $P$  est discontinue en  $x_1 = \frac{1}{2}$ .

(b) En  $x_2 = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = \frac{1}{2} + \frac{1 - 2\pi}{2} \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} P(x)$$

Donc  $P$  est discontinue en  $x_2 = 1$ .

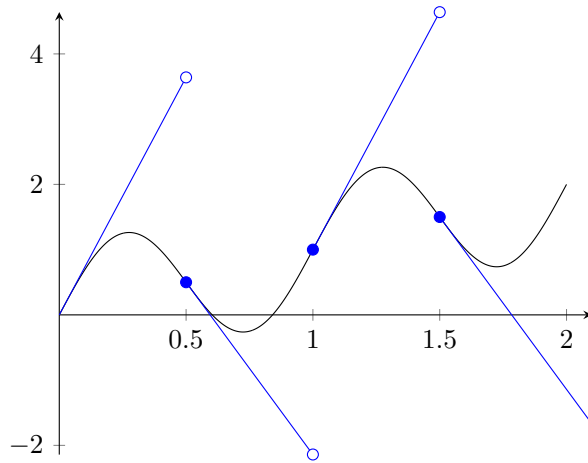
(c) En  $x_3 = \frac{3}{2}$ :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} P(x) = 1 + \frac{2\pi + 1}{2} \neq \frac{3}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} P(x)$$

Donc  $P$  est discontinue en  $x_3 = \frac{3}{2}$ .

Le graphique ci-dessous représente  $P$ , en bleu, et  $f$ , en noir. On peut voir les 3 points de discontinuité en  $x_1, x_2, x_3$ .

(Il n'est pas demandé de tracer le graphique de  $f$  dans l'énoncé)



→ (Thm. de Taylor, 2<sup>ème</sup> partie)

(c) Démontrons que  $|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^2}{2}$  pour tout  $x \in [0, 2]$ . Par un résultat du cours, on sait que

$$\begin{aligned} |f(x) - p_i(x)| &\leq \max_{y \in [x_i, x]} \left| \frac{f''(y)}{2} (x - x_i)^2 \right| \\ &= \max_{y \in [x_i, x]} | -2\pi^2 \sin(2\pi y) (x - x_i)^2 | \\ &\leq 2\pi^2 (x - x_i)^2 \end{aligned}$$

car  $| -2\pi^2 \sin(2\pi y) |$  est borné par  $2\pi^2$ .

De plus, sur chaque morceau de  $P$ , on a  $|x - x_i| \leq \frac{1}{2}$ . On obtient donc bien

$$|f(x) - P(x)| \leq 2\pi^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}.$$

**Question 2:**

(a) Calculer le développement limité d'ordre 2 de  $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  autour de  $x_0 = 1$ .

(b) Déterminer si la série

$$\sum_{n \geq 1} \left\{ \arctan\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \right\}$$

converge ou diverge, en justifiant rigoureusement votre réponse.

**Solution :**

(a) Calculons le développement limité d'ordre 2 de  $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  autour de  $x_0 = 1$ . Calculons d'abord ses dérivées première et deuxième:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

$$f''(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Détail :  $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$   
 donc  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}$   
 $= -\frac{1}{1+x^2}$

Rappelons que le développement limité d'ordre 2 de  $f$  en  $x_0$  est

$$f(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Par ailleurs, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R(x),$$

où  $R$  est une fonction définie dans un voisinage de  $x_0 = 1$  et il existe deux constantes  $\delta > 0$  et  $C > 0$  telles que  $R(x) \leq C(x - x_0)^2$  pour tout  $x$  tel que  $|x - x_0| < \delta$  (on utilisera cela au point 2).

Calculons ce développement limité pour  $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ :

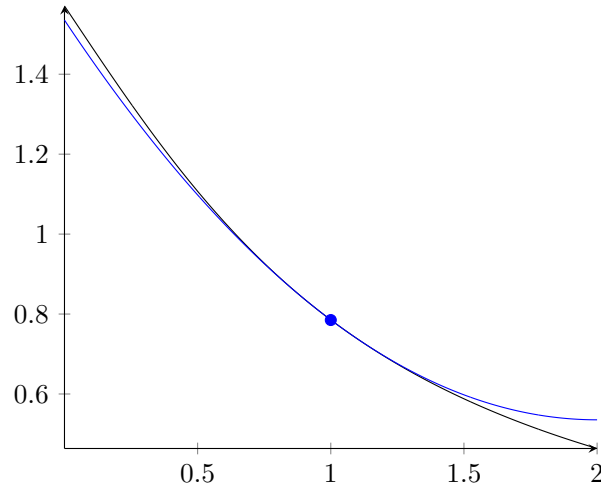
$$f(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x - 1)^k + R(x)$$

$$= \arctan(1) - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{4}(x - 1)^2 + R(x)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{4}(x - 1)^2 + R(x),$$

où  $R(x) = (x - 1)^2 \varepsilon(x)$  où  $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x) = 0$

Dans le graphique ci-dessous, on peut voir  $f$  en noir et le polynôme de Taylor de degré 2 en 1,  $\arctan(1) - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{4}(x - 1)^2$ , en bleu.



(b) Pour déterminer si la série

$$\sum_{n \geq 1} \left\{ \arctan\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \right\}$$

converge ou diverge, on va calculer  $\arctan\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)$  et observer son comportement quand  $n \rightarrow \infty$ . Remplaçons  $x$  par  $1 + \frac{1}{n}$  au point 1.

$$\arctan\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + R\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Ecrivons donc le terme de la somme comme

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \\ = \frac{1}{4n^2} + R\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Par le point 1, il existe  $\delta > 0$  et  $C > 0$  tels que  $R(x) \leq C(x - 1)^2$  pour tout  $x$  tel que  $|x - x_0| < \delta$ . Ainsi, si  $n \geq \frac{1}{\delta}$ ,  $|1 + \frac{1}{n} - 1| \leq \delta$ , et donc  $R\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq C \frac{1}{n^2}$ . Le terme de la somme est donc borné quand  $n \geq \frac{1}{\delta}$ :

$$\arctan\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{4n^2} + C \frac{1}{n^2} = C' \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge, par le critère de comparaison, on déduit que

$$\sum_{n \geq 1} \arctan\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n}$$

converge aussi.

**Question 3:**

Calculer l'intégrale  $\int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \frac{1}{x^2} dx$  en effectuant le changement de variables  $u = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ .

**Solution :**

Les nouvelles bornes sont

$$u_1 = \sqrt{\frac{1/8+1}{1/8}} = \sqrt{1+8} = 3 \quad \text{pour } x_1 = \frac{1}{8}$$
$$u_2 = \sqrt{\frac{1/3+1}{1/3}} = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{pour } x_2 = \frac{1}{3}.$$

On donne trois approches de résolution. La première calcule  $dx$  en fonction de  $du$ , la deuxième  $du$  en fonction de  $dx$  et la troisième exprime  $\frac{1}{x^2} dx$  en fonction de  $du$ .

(a) On commence par isoler  $x$  en fonction de  $u$ :

$$u = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$
$$\Leftrightarrow u^2 = \left| \frac{x+1}{x} \right|$$
$$\Leftrightarrow u^2 = \frac{x+1}{x} \quad (\text{car } x > 0)$$
$$\Leftrightarrow xu^2 = x+1$$
$$\Leftrightarrow x(u^2 - 1) = 1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{u^2 - 1}.$$

On calcule la dérivée puis  $dx$  en fonction de  $du$

$$\frac{dx}{du} = \frac{-1}{(u^2 - 1)^2} 2u \Rightarrow dx = \frac{-2u}{(u^2 - 1)^2} du.$$

On peut maintenant réécrire l'intégrale

$$I = \int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \frac{1}{x^2} dx$$
$$= \int_3^2 \sqrt{\frac{\frac{1}{u^2-1} + 1}{\frac{1}{u^2-1}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{u^2-1}\right)^2} \cdot \frac{-2u}{(u^2-1)^2} du$$
$$= \int_3^2 \sqrt{\frac{1+u^2-1}{1}} \cdot (u^2-1)^2 \cdot \frac{-2u}{(u^2-1)^2} du$$
$$= \int_3^2 u \cdot (-2u) du$$
$$= 2 \int_2^3 u^2 du$$
$$= \frac{2}{3} \left[ u^3 \right]_2^3$$
$$= \frac{2}{3} (27 - 8)$$
$$= \frac{2}{3} 19.$$



(b) On commence par calculer le nouvel élément infinitésimal  $du$  et exprimer  $du$  en fonction de  $dx$ .

$$u = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$
$$\implies \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{x - (x+1)}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{(-1)}{x^2}$$

On peut donc écrire  $du$  en fonction de  $dx$ :

$$du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{x+1}{x}}} dx.$$

On peut maintenant réécrire l'intégrale

$$I = \int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \frac{1}{x^2} dx = \int_3^2 u \cdot (-2u) du = \int_2^3 2u^2 du = \left[ \frac{2}{3} u^3 \right]_2^3$$
$$= \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{2}{3} 19.$$

(c) On commence par calculer le nouvel élément infinitésimal  $du$  et exprimer  $\frac{1}{x^2} dx$  en fonction de  $du$ .

$$u = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$
$$\implies \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{x - (x+1)}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{(-1)}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{(-1)}{x^2}$$

On peut donc écrire  $\frac{1}{x^2} dx$  en fonction de  $du$ :

$$\frac{1}{x^2} dx = (-2u) du.$$

On peut maintenant réécrire l'intégrale

$$I = \int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \frac{1}{x^2} dx = \int_3^2 u \cdot (-2u) du = \int_2^3 2u^2 du = \frac{2}{3} \left[ u^3 \right]_2^3$$
$$= \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{2}{3} 19.$$