

Cours Euler, Première Année

Partie I: Les Nombres

Jérôme Scherer

Introduction

Pendant les premières semaines du cours Euler nous étudierons les nombres. Notre hypothèse de base est que nous connaissons tous l'ensemble \mathbb{N} des nombres entiers naturels. Dans un cours de mathématiques universitaire on construirait ces nombres avec des méthodes ensemblistes, mais cela nous emmènerait trop loin dans le formalisme. Nous allons tout de même commencer par mettre en place quelques bases de théorie des ensembles qui nous seront utiles par la suite dans tous les sujets que nous aborderons. Nous continuerons ensuite en étudiant les propriétés des nombres naturels, puis en construisant à partir de celles-ci les nombres entiers relatifs \mathbb{Z} pour résoudre le problème de la soustraction, puis les nombres rationnels \mathbb{Q} pour résoudre celui de la division. Tout à la fin de cette première partie nous introduirons les nombres réels et le développement décimal.

Chapitre 1

Théorie des ensembles

Nous commençons le cours avec les bases nécessaires à des raisonnements rigoureux. Nous parlerons dans ce premier chapitre d'ensembles et de leurs éléments, puis des opérations qui permettent de créer de nouveaux ensembles à partir d'ensembles connus : intersection, union, différence, etc. Dans le chapitre suivant nous étudierons tout spécialement l'ensemble des nombres naturels.

1. Appartenance et inclusion

De manière intuitive un ensemble est une collection d'objets qu'on appelle ses *éléments*. Si l'objet x est un élément de l'ensemble X , on dit qu'il appartient à X et on note

$$x \in X.$$

La négation de cette affirmation est notée

$$x \notin X$$

et on dit donc que x n'appartient pas à l'ensemble X . Un ensemble est entièrement déterminé par les éléments qui le composent. On définit ainsi l'égalité d'ensembles de la manière suivante. Soient X et Y deux ensembles. Alors

$$X = Y \iff \text{pour tout } x (x \in X \iff x \in Y)$$

où le symbole \iff se lit "si et seulement si" et signifie que les affirmations de part et d'autre de ce signe sont équivalentes.

Si l'ensemble étudié n'est pas trop grand, on peut le décrire en donnant la liste de ses éléments entre accolades.

EXEMPLE 1.1. Pour l'ensemble de villes $X = \{\text{Paris}; \text{Berne}; \text{Istanbul}\}$, on voit que $\text{Paris} \in X$ mais $\text{Lausanne} \notin X$.

Pour l'ensemble de nombres : $Y = \{3; 50; 8\}$, on observe que ce même ensemble peut être décrit aussi comme $Y = \{3; 8; 50\}$ ou encore $\{3; 8; 50; 50\}$. Ni l'ordre, ni la répétition n'ont d'influence dans la description d'un ensemble.

Enfin considérons l'ensemble d'ensembles $E = \{X; Y\}$, c'est-à-dire que les éléments de E sont eux-mêmes des ensembles! Alors $\text{Paris} \in X$, l'ensemble $X \in E$, mais $\text{Paris} \notin E$.

DÉFINITION 1.2. L'*ensemble vide* est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note \emptyset .

Parfois, en particulier lorsqu'il y a beaucoup d'éléments dans l'ensemble considéré, il est plus aisé de décrire les éléments par une propriété, appelons-la P , qu'ils vérifient tous. On écrit alors

$$X = \{a \mid a \text{ a la propriété } P\}$$

qui se lit « X est l'ensemble des objets a tels que a vérifie la propriété P ».



REMARQUE 1.3. **Paradoxe de Russel.** Une propriété ne détermine pas nécessairement un ensemble! Essayons de travailler avec la propriété “être un ensemble qui n'appartient pas à lui-même”. L'ensemble X des ensembles qui ont cette propriété fait-il partie de X ? Si on répond oui, alors, comme par définition les membres de cet ensemble n'appartiennent pas à eux-mêmes, il n'appartient pas à lui-même : contradiction. Mais si on répond non, alors il a la propriété requise pour appartenir

à lui-même : contradiction de nouveau. On a donc une contradiction dans les deux cas.



Bertrand Russell illustra ceci sous la forme plus imagée du paradoxe du barbier. Un barbier se propose de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. La question que l'on se pose est si le barbier doit se raser lui-même ! L'étude des deux possibilités conduit de nouveau à une contradiction.

Pour construire de nouveaux ensembles à partir d'ensembles connus, le procédé le plus simple est de former des sous-ensembles.

DÉFINITION 1.4. Un ensemble Y est un *sous-ensemble* ou une *partie* d'un ensemble X si tout élément y de Y appartient aussi à X :

$$\text{Pour tout } x, (x \in Y \Rightarrow x \in X)$$

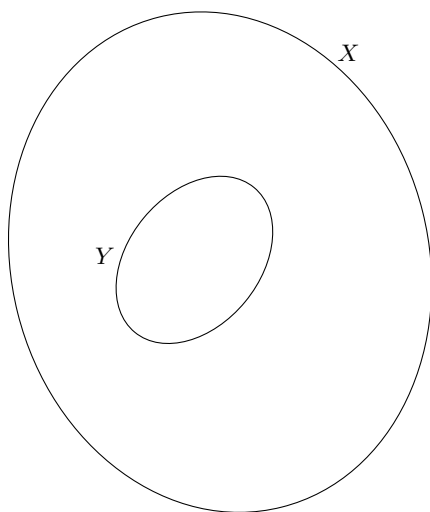
On note alors $Y \subset X$ et on dit que Y est *contenu* dans X . Sa négation est notée $Y \not\subset X$.

Lorsque l'on forme le sous-ensemble de X de tous les éléments qui vérifient une propriété P donnée, on l'écrit $\{x \in X \mid x \text{ a la propriété } P\}$ pour éviter de devoir écrire $\{x \mid x \in X \text{ et } x \text{ a la propriété } P\}$.

EXEMPLE 1.5. Soit X un ensemble. Alors on a toujours $\emptyset \subset X$ et $X \subset X$.



Il est souvent utile de se représenter ensembles et sous-ensembles sous forme de diagramme de Venn, comme ci-dessous où l'on visualise le sous-ensemble Y des oiseaux dans l'ensemble X des animaux.



La proposition suivante s'appelle le *principe de la double inclusion*. Ce principe sera souvent bien utile, en particulier pour démontrer que deux ensembles sont les

mêmes. Pour ce faire il suffira de montrer que l'un est contenu dans l'autre et que l'autre est contenu dans l'un !

PROPOSITION 1.6. *Soit X, Y des ensembles. Alors,*

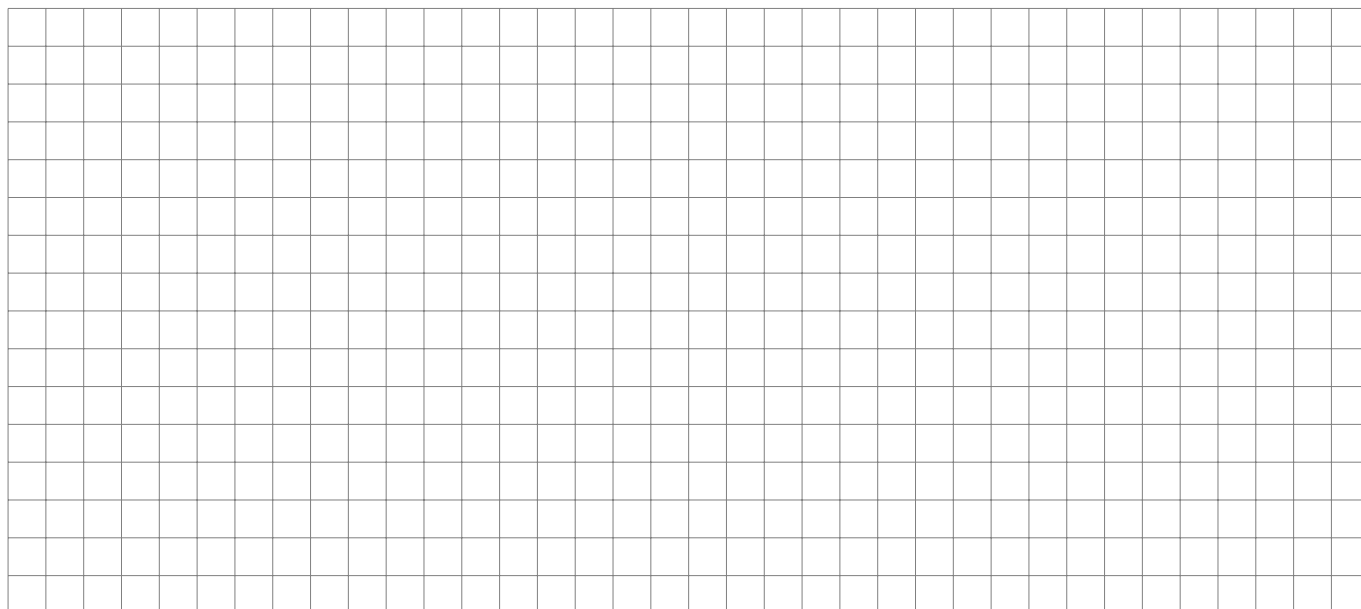
$$X = Y \iff (X \subset Y \text{ et } Y \subset X)$$



DÉFINITION 1.7. Soit X un ensemble. L'ensemble des parties de X , noté $\mathcal{P}(X)$, est l'ensemble de tous les sous-ensembles de X . Ainsi

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$$

EXEMPLE 1.8. Si $X = \{x\}$ est un ensemble avec un seul élément, alors



2. Opérations sur les ensembles

On se place maintenant dans un “grand” ensemble contenant des sous-ensembles à l'aide desquels on veut construire de nouveaux sous-ensembles. Pour commencer

$$(2) X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z;$$

$$(3) \text{ Si } A \subset X, \text{ alors } A \cup X = X;$$

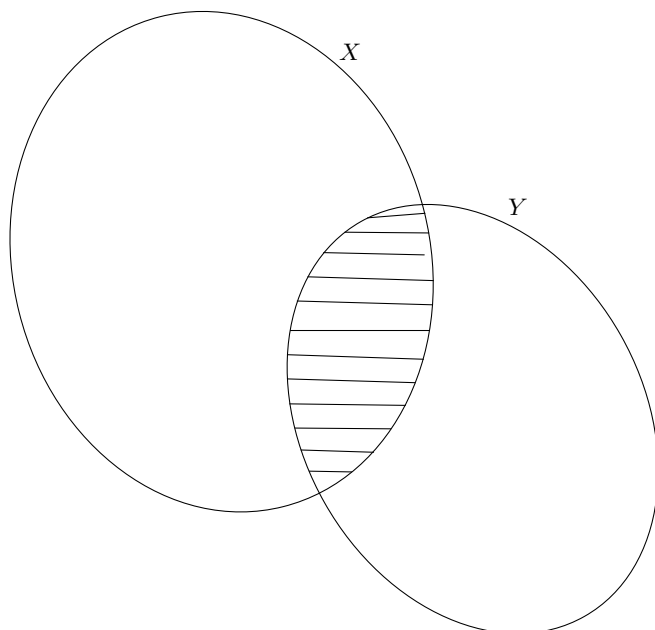
$$(4) X \cup Y = Y \cup X.$$



L'intersection de X et Y est définie comme le sous-ensemble des éléments qui se trouvent à la fois dans X et dans Y .

DÉFINITION 2.4. Soient X et Y des ensembles. L'*intersection* de X et Y , notée $X \cap Y$, est l'ensemble défini par $X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ et } x \in Y\}$. On dit que deux ensembles X et Y sont *disjoints* si leur intersection est vide, c'est-à-dire $X \cap Y = \emptyset$.

Ainsi l'intersection se traduit par la conjonction de coordination "et". Par définition $X \cap Y \subset X \subset X \cup Y$. Voici le diagramme de Venn d'une intersection :



EXEMPLE 2.5. Si $X = \{\text{Genève}; \text{Delémont}; \text{Lausanne}\}$ et $Y = \{\text{Berne}; \text{Fribourg}\}$, alors $X \cap Y = \emptyset$. Si $Z = \{\text{Berne}; \text{Delémont}; \text{Genève}\}$, alors $X \cap Z = \{\text{Genève}; \text{Delémont}\}$.

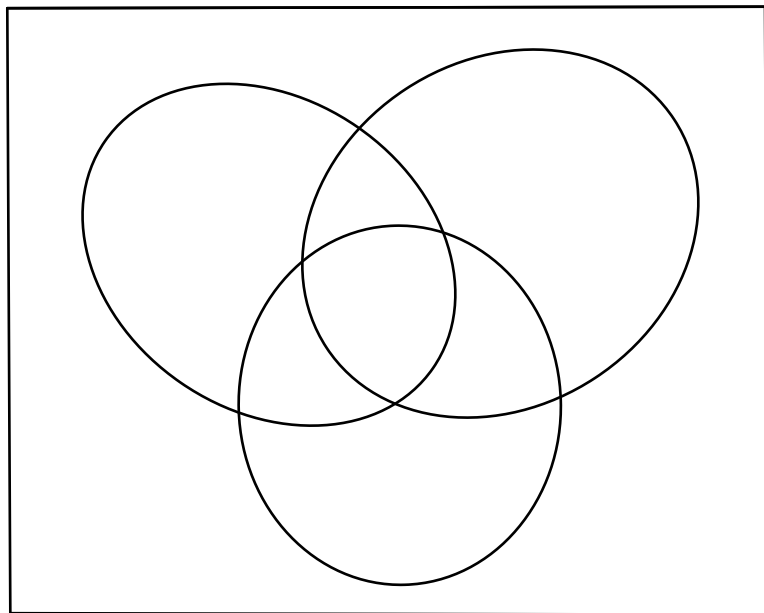
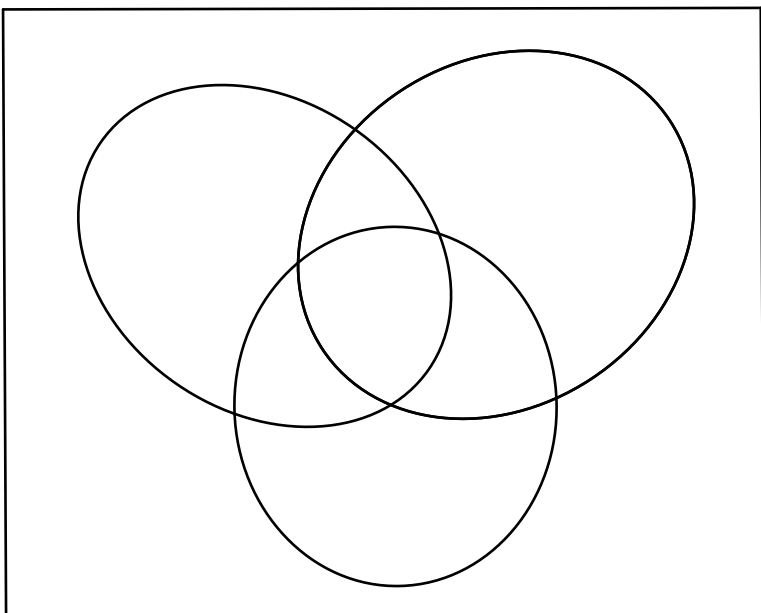
Cette fois les propriétés de l'intersection devraient nous faire penser à certaines propriétés de la multiplication.

PROPOSITION 2.6. *Soient X, Y, Z des ensembles. Alors on a :*

- (1) $X \cap \emptyset = \emptyset$;
- (2) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$;
- (3) Si $A \subset X$, alors $A \cap X = A$;
- (4) $X \cap Y = Y \cap X$;
- (5) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

DÉMONSTRATION. La première affirmation est intuitivement claire : il n'y a aucun élément qui appartient à la fois à X et à l'ensemble vide puisqu'aucun élément ne se trouve dans l'ensemble vide. Formellement on peut démontrer cela en remarquant que $X \cap \emptyset \subset \emptyset$. Le seul sous-ensemble de \emptyset est \emptyset ce qui termine la démonstration.

La deuxième affirmation peut par exemple se comprendre en observant le diagramme de Venn d'une triple intersection.



□

C'est la première fois dans ce cours que je termine une démonstration en l'indiquant par un carré en fin de ligne. On peut utiliser d'autres symboles, mais c'est agréable de voir à l'avance où la preuve se terminera. De plus j'aime particulièrement le carré car on le dessine en quatre petits traits, qui rappellent les quatre lettres de "CQFD" (ce qu'il fallait démontrer).

DÉFINITION 2.7. Soient X et Y deux ensembles. La *différence* de X et Y , notée $X - Y$, ou parfois aussi $X \setminus Y$, est l'ensemble $X - Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$. Si $A \subset X$, le *complémentaire* de A dans X est l'ensemble $X - A$. On le note A^c si le contexte est clair.

On a en particulier $X - X = \emptyset$ et $X - \emptyset = X$.

EXEMPLE 2.8. Considérons les ensembles $X = \{\text{Genève}; \text{Delémont}; \text{Lausanne}; \text{Berne}\}$ et $Y = \{\text{Berne}; \text{Fribourg}; \text{Genève}; \text{Sion}; \text{Aarau}\}$, alors $X - Y = \{\text{Delémont}; \text{Lausanne}\}$ et $Y - X = \{\text{Fribourg}; \text{Sion}; \text{Aarau}\}$.



Chapitre 2

Les nombres naturels

Nous étudions dans ce chapitre les nombres naturels et en particulier les notions de multiple et de diviseur, ce qui nous amènera tout naturellement aux nombres premiers. Nous ne construisons pas les nombres naturels dans ce cours et ne démontrons donc pas les propriétés élémentaires de la première section ci-dessous.

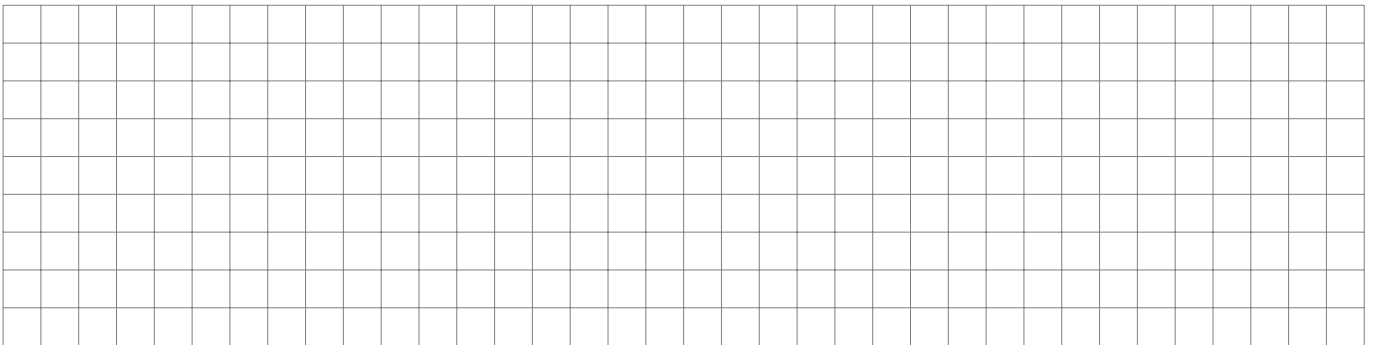
1. L'ensemble des entiers naturels

Pour préparer le terrain nous rappelons quelques faits sur les entiers naturels $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$. C'est un ensemble infini muni d'une addition et d'une multiplication. Ces opérations vérifient les cinq propriétés suivantes.

PROPOSITION 1.1. *Soient m, n, k des nombres naturels.*

- (i) (Associativité) $(m + n) + k = m + (n + k)$ et $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$
- (ii) (Commutativité) $m + n = n + m$ $m \cdot n = n \cdot m$
- (iii) (Elément neutre) $m + 0 = m$ $m \cdot 1 = m$
- (iv) (0 est absorbant) $m \cdot 0 = 0$
- (v) (Distributivité) $m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k$

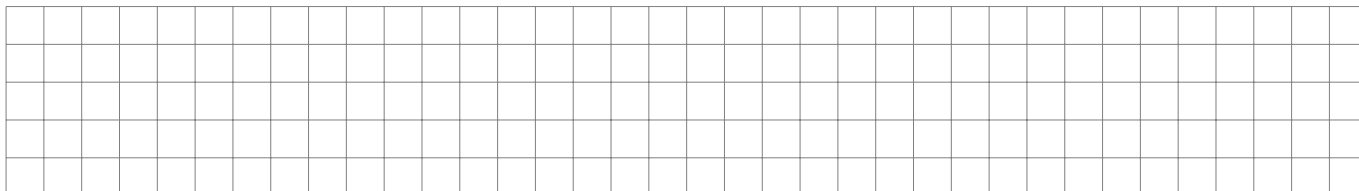
EXEMPLE 1.2. La distributivité est illustrée par le principe bien connu de la multiplication en colonnes. On se demande combien il y a d'heures dans une année.



Lorsqu'on multiplie plusieurs fois un nombre naturel n par lui-même, il est pratique d'utiliser la notation en puissance. On pose par définition $n^0 := 1$.

NOTATION 1.3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ différent de zéro, on pose

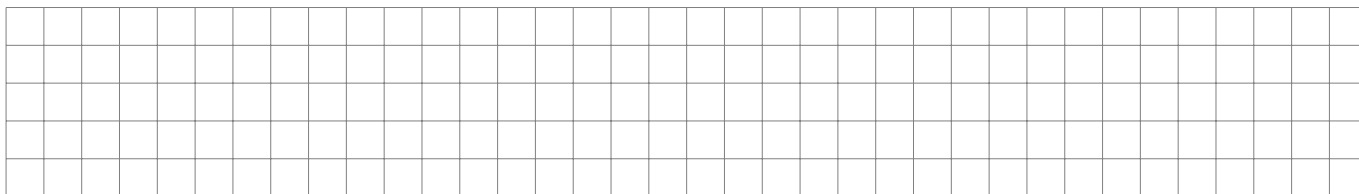
$$n^k := \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ facteurs}}$$



L'une des propriétés remarquables des puissances est que

$$n^k \cdot n^l = n^{k+l}$$

puisque le produit de k copies de n avec celui de l copies de n est exactement le produit de $k + l$ copies de n . Par exemple $3^2 \cdot 3^3 = 9 \cdot 27 = 243 = 3^5$. C'est pour que cette propriété soit satisfaite pour tous les entiers naturels k et l que nous devons poser $n^0 = 1$.



2. Soustraction et division

La soustraction n'est pas à proprement parler une opération sur \mathbb{N} car elle peut « sortir » de \mathbb{N} . Par exemple,

$$7 - 3 = 4 \in \mathbb{N}, \text{ mais } 3 - 7 \text{ n'est pas défini dans } \mathbb{N}.$$

DÉFINITION 2.1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On dit que m est *plus petit (ou égal)* à n , ce qui se note $m \leq n$, s'il existe un nombre naturel k tel que

$$n = m + k. \tag{1}$$

On dit que m est *strictement plus petit* que n , ce qui se note $m < n$, si $m \leq n$ et $m \neq n$. On note $m \geq n$ pour $n \leq m$ et on dit que m est *plus grand (ou égal)* à n .

REMARQUE 2.2. Lorsque $m \leq n$, le nombre k de l'égalité (1) est uniquement déterminé par m et n .

DÉFINITION 2.3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. La *différence* de n et m , notée $n - m$, est l'unique nombre naturel k vérifiant $n = m + k$.

Des propriétés de l'addition on déduit les propriétés suivantes de la soustraction.

PROPOSITION 2.4. Soient $m, n, k \in \mathbb{N}$. Alors

(1) $m - (n + k) = (m - n) - k$, si $n + k \leq m$.

(2) $m - (n - k) = (m + k) - n$ si $k \leq n$ et $n - k \leq m$.

(3) $m + (n - k) = (m + n) - k$ si $k \leq n$.

(4) $m \cdot (n - k) = m \cdot n - m \cdot k$ si $k \leq n$.

(5) $m - 0 = m$ et $m - m = 0$.



EXEMPLE 2.5. On a par exemple

$$11 - (5 + 3) = 11 - 8 = 3 = 6 - 3 = (11 - 5) - 3$$

Pour illustrer la quatrième propriété on a par exemple

$$3 \cdot (25 - 21) = 3 \cdot 4 = 12 = 75 - 63 = 3 \cdot 25 - 3 \cdot 21$$

La division n'est pas non plus une opération sur \mathbb{N} pour la même raison : elle n'est pas toujours définie. Par exemple,

$$8 : 2 = 4 \in \mathbb{N}, \text{ mais } 8 : 3 \text{ n'est pas défini dans } \mathbb{N}.$$

DÉFINITION 2.6. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On dit que m *divise* n (ou m est un *diviseur* de n , ou encore n est *divisible* par m) s'il existe un nombre naturel k tel que $n = m \cdot k$. On note $m \mid n$ cette affirmation.

EXEMPLE 2.7. Le nombre 15 est divisible par 3, mais pas par 2. Le nombre 0 ne divise aucun autre nombre sauf lui-même. En effet $0 = 0 \cdot 1$, mais pour $n \neq 0$, on n'a jamais $n = 0 \cdot k$.

REMARQUE 2.8. Si $m \mid n$ et $m \neq 0$, alors il existe un unique nombre naturel k tel que $n = m \cdot k$.



DÉFINITION 2.9. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \mid n$ et $m \neq 0$. Le *quotient* de n par m , noté $n : m$, est l'unique nombre naturel k tel que $n = m \cdot k$.

De la même façon que les propriétés de l'addition expliquent celles de la soustraction, les propriétés de la multiplication ont des conséquences pour la division. Il est utile de penser à une situation concrète pour garder à l'esprit le sens de ces égalités et ne pas être tenté de manipuler ces opérations en oubliant ce qu'elles signifient. Par exemple pour la propriété (1), j'aime penser à une tarte que l'on divise en $6 = 2 \cdot 3$. C'est équivalent à partager la tarte en 2, puis chaque moitié en 3.

PROPOSITION 2.10. Soient $m, n, k \in \mathbb{N}$. Alors

- (1) $m : (n \cdot k) = (m : n) : k$, si $n \cdot k \mid m$.
- (2) $m : (n : k) = (m \cdot k) : n$ si $k \mid n$ et $(n : k) \mid m$.
- (3) $m \cdot (n : k) = (m \cdot n) : k$ si $k \mid n$.

(4) *Simplification* : $(m \cdot n) : (m \cdot k) = n : k$ si $k \mid n$.

(5) $m : 1 = m$ et $m : m = 1$.

DÉMONSTRATION. *de la partie (4)*. Puisque k divise n , il existe un nombre naturel q tel que $n = k \cdot q$. Alors

$$m \cdot n = m \cdot (k \cdot q) = (m \cdot k) \cdot q$$

ce qui montre que $(m \cdot n) : (m \cdot k) = q = n : k$. □



REMARQUE 2.11. Nous avons vu au début de ce chapitre les propriétés d'associativité, de commutativité, etc. de la somme et du produit des nombres naturels. Nous avons aussi remarqué que l'union et l'intersection d'ensembles satisfont à des propriétés analogues. Ceci justifie l'introduction de la notion suivante. Un ensemble X , muni de deux opérations \star et \circ vérifiant les propriétés (1)-(5) ci-dessous s'appelle un *semi-anneau commutatif*.

- (1) Associativité : $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ et $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ pour tous $x, y, z \in X$.
- (2) Commutativité : $x \star y = y \star x$ et $x \circ y = y \circ x$ pour tous $x, y \in X$.
- (3) Eléments neutres : Il existe des éléments $e, \eta \in X$ tels que $x \star e = x$ et $x \circ \eta = x$ pour tous $x \in X$.
- (4) e est absorbant pour \circ : pour tout $x \in X$, on a $x \circ e = e$.
- (5) Distributivité : $x \circ (y \star z) = x \circ y \star x \circ z$ pour tous $x, y, z \in X$.

L'ensemble \mathbb{N} muni des opérations $+$ et \cdot est un semi-anneau commutatif. Etant donné un ensemble X , son ensemble des parties $\mathcal{P}(X)$ muni des opérations \cup et \cap aussi.



DÉFINITION 3.4. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ des nombres non nuls. Le *plus petit multiple commun* de m et n , noté $\text{ppmc}(m, n)$, est le plus petit nombre entier naturel non nul qui est un multiple de m et de n . Si m ou n est égal à zéro, alors $\text{ppmc}(m, n) = 0$.

Les exemples suivants indiquent que le ppmc de m et n est “au pire” égal au produit $m \cdot n$, mais qu’il peut être plus petit, auquel cas c’est un diviseur de $m \cdot n$.

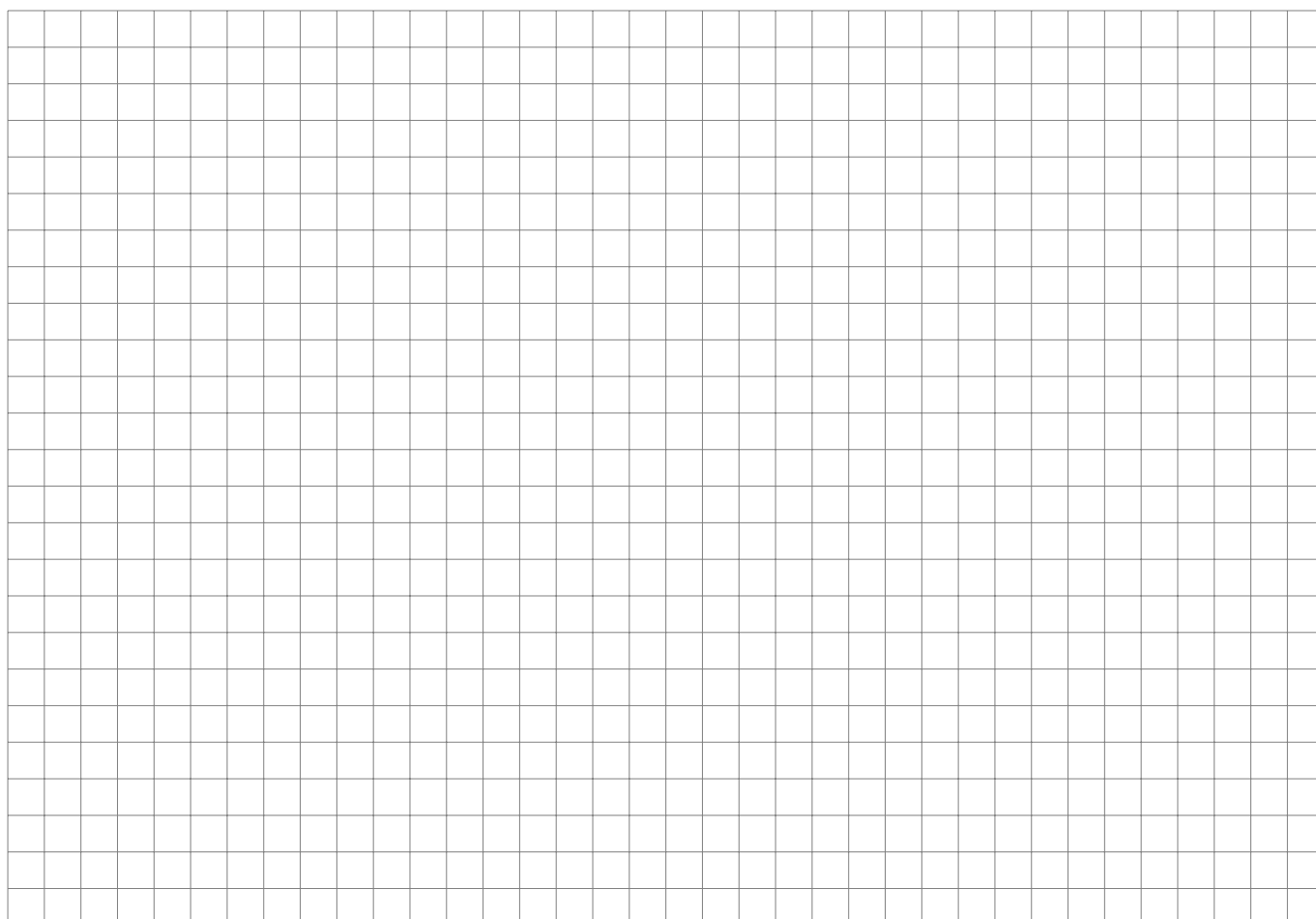


PROPOSITION 3.5. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Alors $M_m \cap M_n = M_{\text{ppmc}(m, n)}$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer l’égalité de ces deux ensembles nous appliquons le *principe de la double inclusion*. Pour commencer le ppmc de m et n est un

multiple commun de m et n . Ainsi $M_{\text{ppmc}(m,n)} \subset M_m$ et $M_{\text{ppmc}(m,n)} \subset M_n$, si bien que $M_{\text{ppmc}(m,n)}$ est contenu dans l'intersection.

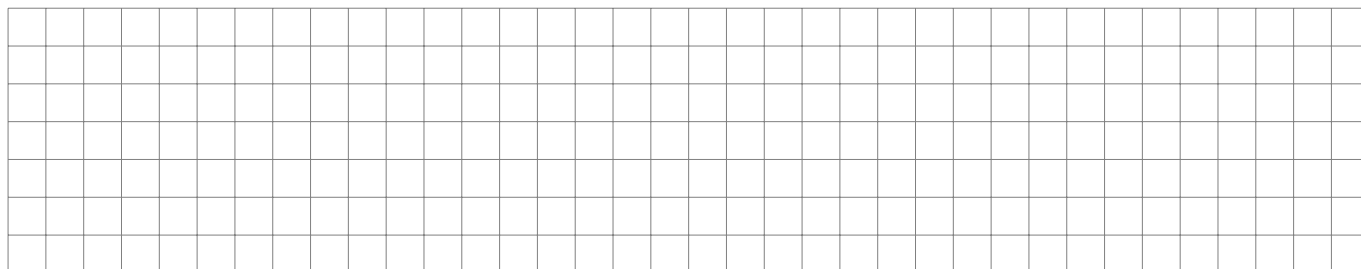
Pour montrer l'égalité il faut encore montrer l'inclusion $M_m \cap M_n \subset M_{\text{ppmc}(m,n)}$.
La traduction française : Si k est un multiple de m et de n , alors c'est un multiple du ppmc de m et n .



□

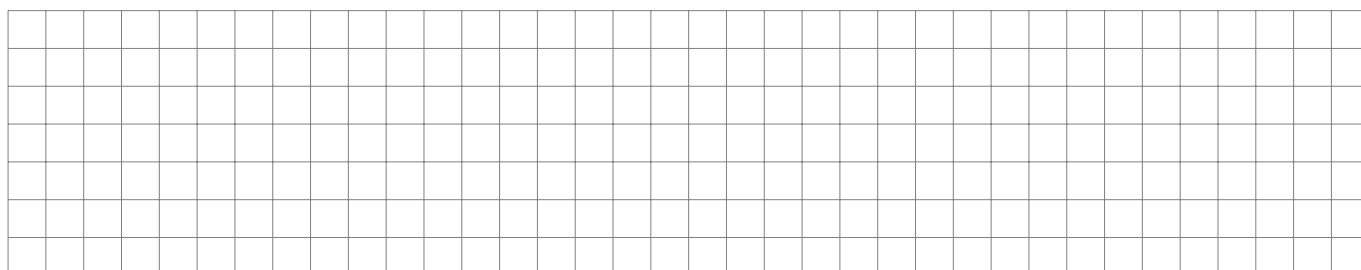
4. Diviseurs et diviseurs communs

L'ensemble des diviseurs d'un nombre naturel n est noté D_n . Lorsque $n = 0$, on a $D_0 = \mathbb{N}$. Sinon, l'ensemble D_n est un ensemble fini de nombres naturels. Par exemple le nombre 0 n'est un diviseur d'aucun nombre naturel, sauf de 0 lui-même.



DÉFINITION 4.1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Le nombre k est un *diviseur commun* de m et n s'il divise m et divise n . L'ensemble des diviseurs communs de m et n est donc l'intersection $D_m \cap D_n$.

On pourrait aussi se représenter les exemples suivants par des diagrammes de Venn en tous points semblables à ceux des multiples.



DÉFINITION 4.2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Si m ou n est non nul, le *plus grand diviseur commun* de m et n est le plus grand nombre naturel, noté $\text{pgdc}(m, n)$, qui est à la fois un diviseur de m et un diviseur de n . Lorsque $m = n = 0$, on pose $\text{pgdc}(m, n) = 0$.

Nous avons par exemple $\text{pgdc}(8, 24) = 8$ et $\text{pgdc}(36, 24) = 12$.

PROPOSITION 4.3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Alors, $D_m \cap D_n = D_{\text{pgdc}(m, n)}$.

5. Les nombres premiers

Nous terminons la leçon avec une liste des critères de divisibilité dont nous avons parlé la première semaine. Saurais-tu tous les démontrer ?

Critères de divisibilité

Un nombre naturel se divise par :

- 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ; on dit alors qu'il est pair
- 3 si la somme de ses chiffres se divise par 3
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres se divise par 4, notamment s'il se termine par 00
- 5 s'il se termine par 0 ou par 5
- 6 s'il se divise par 2 et par 3
- 9 si la somme de ses chiffres se divise par 9
- 10 s'il se termine par 0
- 25 s'il se termine par 00, 25, 50 ou 75
- 50 s'il se termine par 00 ou 50

© Editions LEP

DÉFINITION 5.1. Un nombre naturel p est *premier* s'il a exactement deux diviseurs.

Observons en particulier que le nombre 1 n'est pas premier, un fait qui prendra son importance dans le Théorème fondamental.

Nombre premier – liste des nombres premiers inférieurs à 1000

2	101	211	307	401	503	601	701	809	907
3	103	223	311	409	509	607	709	811	911
5	107	227	313	419	521	613	719	821	919
7	109	229	317	421	523	617	727	823	929
11	113	233	331	431	541	619	733	827	937
13	127	239	337	433	547	631	739	829	941
17	131	241	347	439	557	641	743	839	947
19	137	251	349	443	563	643	751	853	953
23	139	257	353	449	569	647	757	857	967
29	149	263	359	457	571	653	761	859	971
31	151	269	367	461	577	659	769	863	977
37	157	271	373	463	587	661	773	877	983
41	163	277	379	467	593	673	787	881	991
43	167	281	383	479	599	677	797	883	997
47	173	283	389	487		683		887	
53	179	293	397	491		691			
59	181			499					
61	191								
67	193								
71	197								
73	199								
79									
83									
89									
97									

© Editions LEP

Les deux diviseurs d'un nombre premier sont donc 1 et lui-même. C'est le cas de 31 que nous avons rencontré tout-à-l'heure, mais pas du nombre 1, qui n'est donc pas premier.

REMARQUE 5.2. La distribution exacte des premiers parmi les naturels reste un mystère jusqu'à ce jour. C'est le sujet de la conjecture de Riemann, probablement le plus célèbre problème mathématique non résolu.

Le plus grand nombre premier connu à ce jour (2016, source : Wikipedia) est un nombre dit « de Mersenne » (du type $2^n - 1$). Ce nombre découvert en 2016 a 22'338'618 chiffres. Il s'agit de $2^{74'207'281} - 1$. Pour l'écrire il faudrait un cahier de près de 400 pages à raison de 50 lignes de 66 caractères par page !

THÉORÈME 5.3. **Théorème fondamental de l'arithmétique** *Tout nombre naturel $n \geq 2$ admet une décomposition en produit de facteurs premiers, unique à permutation des facteurs près. Autrement dit, il existe des premiers distincts et uniques p_1, \dots, p_k et des entiers naturels $r_1 > 0, \dots, r_k > 0$ tels que*

$$n = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$$

Par exemple, le nombre 362'880 se décompose comme $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$. En effet, les divisions successives par des diviseurs évidents donnent

$$\begin{aligned} 362'880 &= 10 \cdot 36'288 = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9072 \\ &= 2^3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2268 = 2^5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 567 \\ &= 2^7 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 63 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

Ce théorème s'applique au calcul du ppmc et du pgdc, comme nous l'avons vu en exercices.

COROLLAIRE 5.4. *Soient $m, n \geq 2$ des nombres naturels. Soient $m = p_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_i^{l_i}$ et $n = q_1^{k_1} \cdot \dots \cdot q_j^{k_j}$ leurs décompositions en produit de facteurs premiers. Alors leur ppmc est le produit des facteurs premiers apparaissant dans la décomposition de m ou de n avec le plus grand exposant. Leur pgdc est le produit des facteurs premiers apparaissant dans la décomposition de m et n avec le plus petit exposant. S'il n'y a pas de facteurs communs, alors le pgdc vaut 1.*

EXEMPLE 5.5. Nous voulons calculer le ppmc et le pgdc de 362'880 et 1'100.



Une autre conséquence importante du Théorème fondamental est le premier résultat sur la répartition des nombres premiers, dû à Euclide, III^e siècle av. J.-C (vers -300 , vous voyez qu'il nous faut des nombres négatifs!). La preuve se fait par l'absurde, un concept très important en mathématique. Nous allons donc supposer *par l'absurde* que le résultat est faux. La démonstration sera terminée lorsque nous arriverons à une contradiction, ce qui prouvera donc que l'hypothèse ne pouvait être vraie. Nous avons vu en exercices que l'implication $A \Rightarrow B$ est équivalente à $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$. Autrement dit, si B est fausse, alors A ne peut être vraie.

THÉORÈME 5.6. *Il existe une infinité de nombres premiers.*





Cette démonstration est en fait celle d'Euclide.

Chapitre 3

Les nombres entiers relatifs

Notre but théorique est d'ajouter des nombres négatifs aux nombre naturels pour pouvoir parler de soustraction sans devoir faire d'hypothèse. Il y a bien sûr aussi un but pratique puisque les nombres négatifs apparaissent dans la nature. Ne dit-on pas "trois kilomètres derrière nous", "il y a deux heures", "un découvert de 3000 CHF sur mon compte en banque", "à $-10'000$ m dans la fosse des Mariannes" ou encore "il fait $-40^{\circ}C$ en hiver au Canada" ?

1. Construction des entiers relatifs

Nous allons maintenant étendre l'ensemble des naturels et leurs opérations d'addition et de multiplication de sorte que la soustraction soit toujours définie. Pour cela nous devons ajouter des inverses additifs aux nombres naturels non nuls. Ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, nous ajouterons un nombre, noté $-n$ (pour 0, on pose $-0 = 0$) et étendrons l'addition de \mathbb{N} de sorte que $n + (-n) = 0$. Par conséquent la soustraction sera toujours définie.

DÉFINITION 1.1. Un *nombre entier (relatif)* a consiste en la donnée d'un nombre naturel n , sa *valeur absolue*, et d'un symbole $+$ ou $-$, son *signe*. On note

$$a = (+n) \text{ ou } a = (-n)$$

et on dit qu'un nombre entier est *positif* si son signe est $+$, *négatif* sinon. On pose $(+0) = (-0)$ qu'on note simplement 0. L'ensemble des entiers, noté \mathbb{Z} , est donc

$$\mathbb{Z} = \{\dots, (-4), (-3), (-2), (-1), 0, (+1), (+2), (+3), (+4), \dots\}$$

Nous allégerons bientôt la notation en enlevant les parenthèses, mais pour l'instant nous voulons bien distinguer un nombre entier d'un nombre naturel.

2. L'addition

Nous voulons maintenant étendre la somme de \mathbb{N} à \mathbb{Z} , c'est-à-dire construire une somme dans \mathbb{Z} de sorte que la somme de deux nombres entiers relatifs positifs coïncide avec la somme des entiers naturels correspondants que nous connaissons.

Plus précisément nous verrons qu'il existe une unique manière de définir une opération $+$ sur \mathbb{Z} de sorte que :

- elle se restreint à l'addition de \mathbb{N} sur les positifs,
- elle est associative,
- $(+m) + (-m) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Pour la définir nous devons expliquer comment calculer la somme de deux entiers, chacun d'entre eux pouvant être positif ou négatif. Il y a donc quatre cas à prendre en considération.

DÉFINITION 2.1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$.

(1)

$$(+m) + (+n) = +(m + n).$$

(2)

$$(+m) + (-n) = \begin{cases} +(m - n) & \text{si } m \geq n, \\ -(n - m) & \text{si } n > m. \end{cases}$$

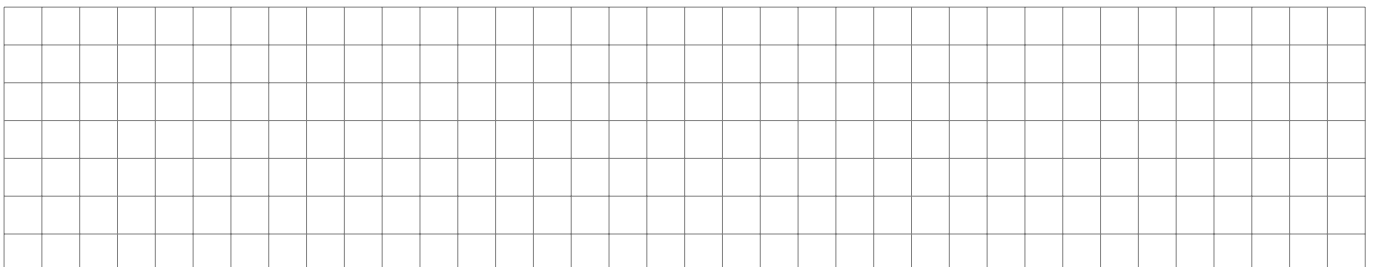
(3)

$$(-m) + (+n) = \begin{cases} +(n - m) & \text{si } n \geq m, \\ -(m - n) & \text{si } m > n. \end{cases}$$

(4)

$$(-m) + (-n) = -(m + n).$$

Le point (1) nous assure que cette addition étend celle de \mathbb{N} .



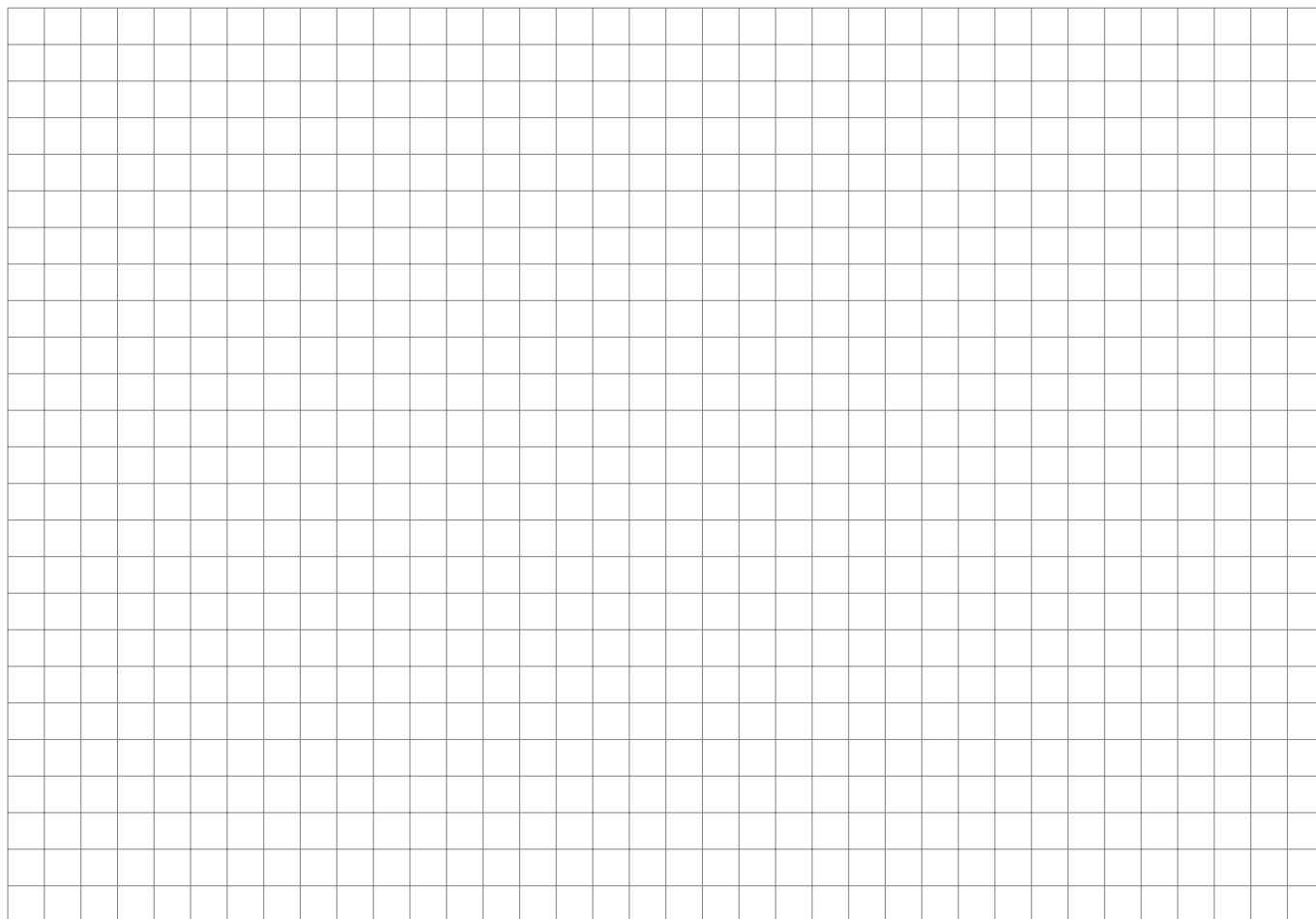


Cette définition est la bonne puisque toutes les belles propriétés de l'addition des entiers naturels sont préservées. Au lieu d'expliquer comme dans l'exemple précédent pourquoi nous sommes obligés de définir l'addition comme nous le faisons, nous travaillons maintenant avec cette définition, que nous acceptons, et nous en déduisons les propriétés souhaitées.

PROPOSITION 2.2. *L'addition dans \mathbb{Z} a les propriétés suivantes :*

- (1) *Associativité : pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$, on a $(a + b) + c = a + (b + c)$.*
- (2) *Élément neutre 0 : pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = a = 0 + a$.*
- (3) *Commutativité : pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on a $a + b = b + a$.*
- (4) *Existence de l'opposé : pour tout entier a , il existe un unique entier noté $-a$, appelé l'opposé de a , tel que $a + (-a) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Aucun point n'est compliqué, mais tous sont un peu laborieux. Pour l'associativité par exemple il faudrait vérifier les huit cas possibles selon que a , b et c sont des entiers positifs ou négatifs. Et lorsque deux entiers relatifs n'ont pas le même signe, on doit encore distinguer plusieurs sous-cas selon laquelle des valeurs absolues est la plus grande.



L'élément neutre est $(+0)$ que nous notons donc 0 dès maintenant. La commutativité est plus simple à vérifier que l'associativité, elle découle de la commutativité de l'addition dans \mathbb{N} lorsque a et b ont le même signe et de la comparaison des formules (2) et (3) lorsqu'ils ont des signes opposés. Quant à l'opposé il est donné, pour tout $m \in \mathbb{N}$, par $-0 = 0$, $-(+m) = (-m)$ et $-(-m) = (+m)$. En effet $0 + 0 = 0$ ce qui force -0 à être égal à 0 , et par exemple $(+11) + (-11) = (+0) = 0$ ce qui implique $-(+11) = (-11)$. \square

Un ensemble X muni d'une opération vérifiant les propriétés (i) à (iv) s'appelle un *groupe abélien*. Nous en verrons sans cesse en mathématiques, aussi bien en algèbre qu'en géométrie !

REMARQUE 2.3. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Quand on regarde la valeur absolue de a comme un entier (positif), on la note $|a|$. Donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $|(+m)| = (+m)$ et

$|(-m)| = (+m)$. Autrement dit,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Par exemple $|(+11)| = (+11)$ et $|(-11)| = (+11)$.

3. La soustraction

Tout le travail que nous avons effectué avait un but : La soustraction existe toujours dans \mathbb{Z} .

PROPOSITION 3.1. *Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $c \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + c$.*

Ce nombre, noté $a - b$, est appelé la *différence* de a et b . Il est donné par $a - b = a + (-b)$. Pour démontrer la proposition il suffit de vérifier que ce nombre vérifie bien l'égalité souhaitée :

$$b + (a - b) = b + (a + (-b)) = b + ((-b) + a) = (b + (-b)) + a = 0 + a = a$$

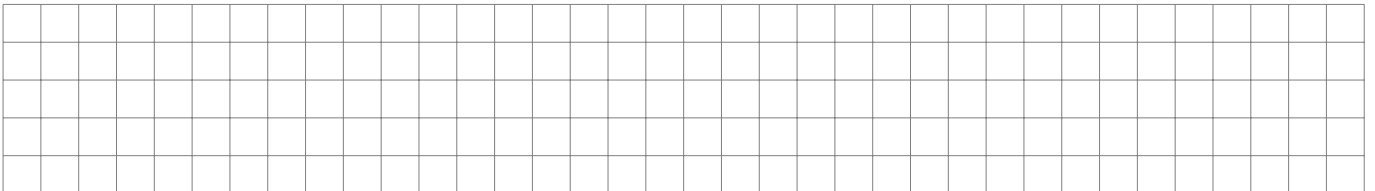
Voici le slogan dont il faut se souvenir :

Dans \mathbb{Z} , soustraire c'est additionner l'opposé.

DÉFINITION 3.2. Soient a et b des nombres relatifs. On dit que a est *plus petit* (ou *égal*) à b , ce qui se note $a \leq b$, s'il existe un nombre entier *positif* c tel que $b = a + c$.

En d'autres termes $a \leq b$ si et seulement si $b - a$, qui existe toujours, est positif.

EXEMPLE 3.3. Un nombre entier relatif a est positif si et seulement $a \geq 0$.



4. Multiplication et division

Pour définir le produit de deux nombres entiers, nous devons à nouveau considérer quatre cas, selon le signe de chacun des deux nombres. Par exemple, si le premier est positif et le second est négatif, on pose $(+m) \cdot (-n) = -(m \cdot n)$. Le produit de deux nombres négatifs est positif, par exemple $(-11) \cdot (-12) = (+132)$.

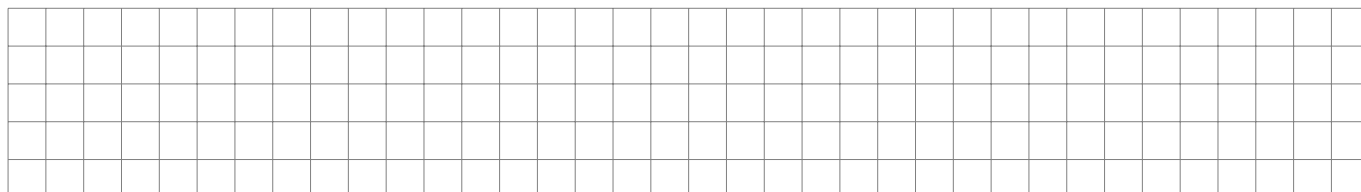
$$(1) (+m) : (+n) = [(m : n)]$$

$$(2) (-m) : (+n) = [-(m : n)]$$

$$(3) (+m) : (-n) = [-(m : n)]$$

$$(4) (-m) : (-n) = [(m : n)]$$

DÉMONSTRATION. Montrons (4) par exemple : $(-m) : (-n) = [(m : n)]$.



Pour montrer (2), c'est-à-dire que $(-m) : (+n) = [-(m : n)]$ il suffit de vérifier que $(+n) \cdot [-(m : n)] = (-m)$. Calculons donc !

$$(+n) \cdot [-(m : n)] = [-(n \cdot (m : n))] = [-(n \cdot m) : n] = (-m)$$

où la première égalité utilise la définition de la multiplication dans \mathbb{Z} , la deuxième une propriété de la division dans \mathbb{N} , et la troisième la simplification dans \mathbb{N} . \square

La division des entiers relatifs a donc les mêmes propriétés que celles des nombres naturels.

5. Retour à la soustraction

Pour terminer nous regardons les propriétés de la valeur absolue et revenons encore à la soustraction. La proposition suivante dit que “le produit des valeurs absolues est égal à la valeur absolue du produit”.

PROPOSITION 5.1. Propriétés de la valeur absolue. *Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Lorsque b est divisible par a , alors $|b : a| = |b| : |a|$.*

Les propriétés de la soustraction que nous énonçons maintenant se déduisent directement des propriétés adéquates de l'addition et la définition de la soustraction. Saurais-tu les démontrer ?

PROPOSITION 5.2. Propriétés de la soustraction. *La soustraction dans \mathbb{Z} a les propriétés suivantes : pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$,*

$$(1) a - (b + c) = (a - b) - c,$$

$$(2) a - (b - c) = (a - b) + c,$$

$$(3) a + (b - c) = (a + b) - c,$$

$$(4) a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c),$$

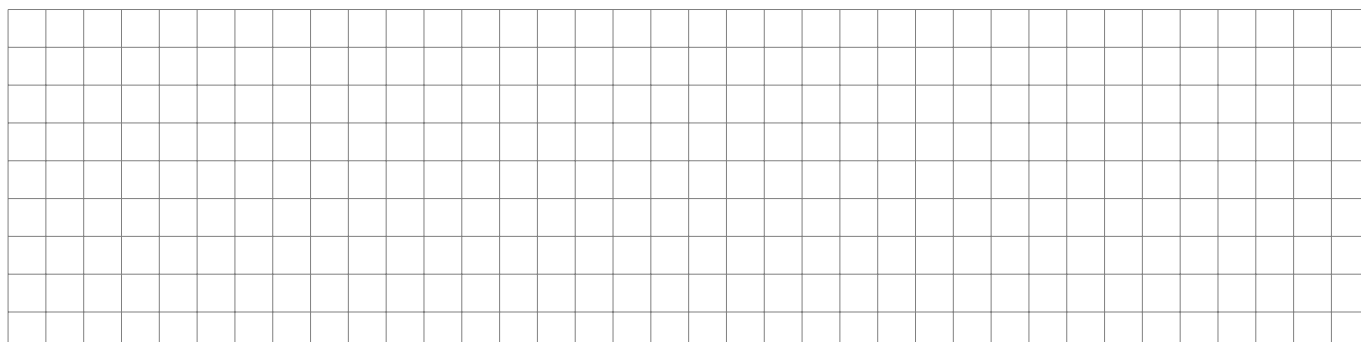
$$(5) a - 0 = a \text{ et } a - a = 0.$$

DÉMONSTRATION. Montrons par exemple la quatrième propriété, les autres sont du même style. Nous devons démontrer que $a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$, c'est-à-dire que la multiplication se distribue par rapport à la soustraction. Nous ne savons pas encore que cela est vrai, mais nous savons néanmoins que la distributivité par rapport à l'addition est vérifiée par la Proposition ?? (4). En observant l'égalité à prouver on constate que le terme de droite est une différence et c'est là la nouveauté de cette section.

Par définition la différence $(a \cdot b) - (a \cdot c)$ est le seul nombre entier relatif x tel que $x + (a \cdot c) = a \cdot b$. Pour montrer que $a \cdot (b - c) = x$ aussi, il faut donc démontrer que $a \cdot (b - c) + (a \cdot c) = a \cdot b$. C'est maintenant que nous avons traduit le problème que nous sommes en fait presque arrivés au bout de la preuve. Il ne reste en effet plus qu'à utiliser la distributivité :

$$a \cdot (b - c) + (a \cdot c) = a \cdot [(b - c) + c] = a \cdot [b - (c - c)] = a \cdot [b - 0] = a \cdot b$$

Pour la deuxième égalité nous avons utilisé la partie (2) de cette proposition, puis le fait que $c - c = 0$ pour tout $c \in \mathbb{Z}$. Enfin $b - 0 = b$ puisque soustraire c'est additionner l'opposé : $b - 0 = b + (-0) = b + 0 = b$ (nous venons de montrer aussi une partie de (5)). Nous sommes arrivés au bout de la preuve! \square



EXEMPLE 6.4.

$$- [(-7) \cdot (-8)] = -(+56) = -56$$

$$[-(-7)] \cdot (-8) = (+7) \cdot (-8) = -56$$

$$(-7) \cdot [-(-8)] = (-7) \cdot (+8) = -56$$

Par contre,

$$- [(-3) + (+8)] = -(-3 + 8) = -5$$

$$-(-3) + (+8) = +3 + 8 = +11$$

$$(-3) + [-(+8)] = (-3) + (-8) = -11$$

Enfin, $-| -(-8) - 6|^3 = -|8 - 6|^3 = -|(+2)|^3 = -(+2)^3 = -(+8) = -8$.

Les nombres rationnels

Nous construisons maintenant les nombres rationnels. L'idée est analogue à celle appliquée pour construire \mathbb{Z} à partir de \mathbb{N} pour rendre la soustraction toujours possible. Ici nous étendons \mathbb{Z} afin de rendre la *division* toujours possible. La motivation vient des besoins de la vie courante. On utilise des fractions lorsqu'on dit trois-quarts d'heure, 10% de rabais, un demi-kilo de pain, le cinquième de la distance, un huitième de gâteau, la mi-temps du match, le Tiers-Monde, une chance sur un million de gagner au loto, un quartier de pomme, ...

1. Construction des nombres rationnels

Le mot « rationnel » vient du latin *ratio* qui signifie rapport, proportion. L'idée mathématique derrière la construction de l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels – avec son addition et sa multiplication – est de former la “plus petite” extension de \mathbb{Z} qui résout l'un des problèmes équivalents suivants (et donc tous) :

- Pouvoir effectuer toutes les divisions par un entier non nul.
- Avoir un inverse multiplicatif pour tout nombre non nul, i.e. pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, avoir un nombre c tel que $a \cdot c = 1$.
- Avoir une solution à toutes les équations du type $a \cdot x = b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$.

On construit l'ensemble \mathbb{Q} à partir de l'ensemble \mathbb{Z} . Dans \mathbb{Q} , on aimerait avoir tous (et seulement) les quotients $a : b$ où $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ (y compris les quotients du type $a : 1$, soit tous les entiers).

Pour chaque paire d'entiers a et b , avec $b \neq 0$, on introduit le *symbole*

$$\frac{a}{b}$$

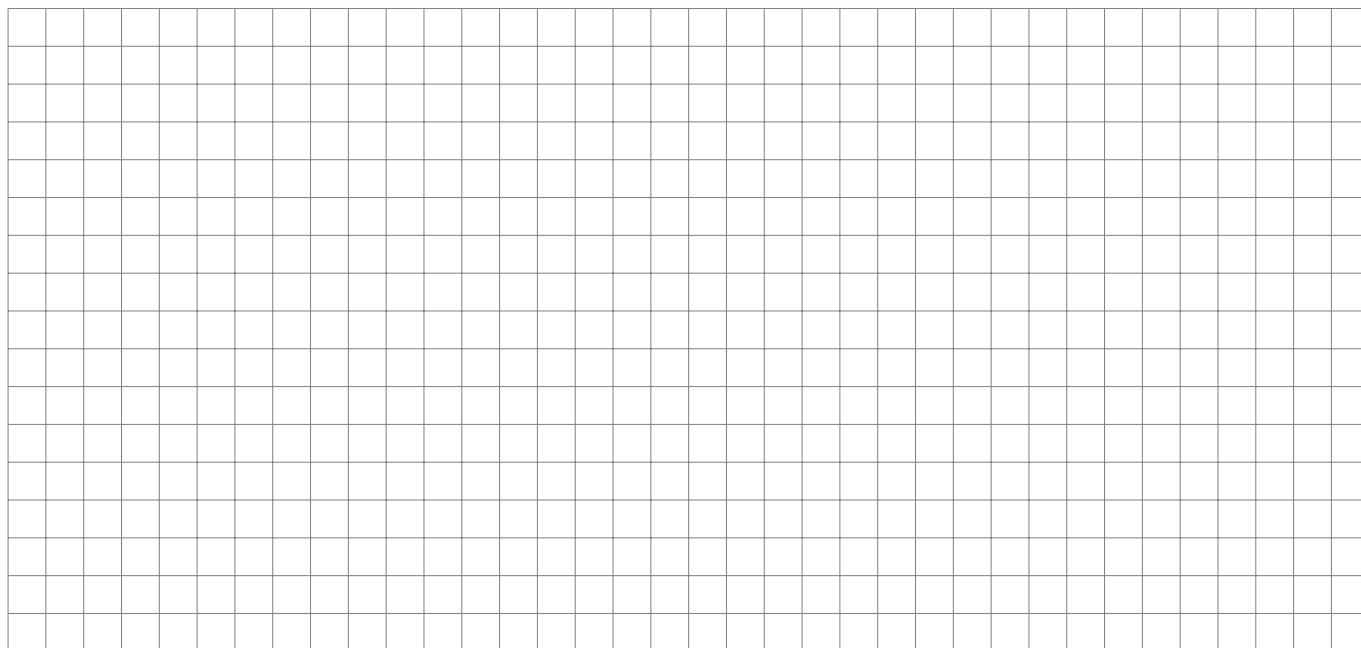
appelé *fraction*, qui devrait jouer le rôle du quotient de a par b et qui manque en général dans \mathbb{Z} (si b ne divise pas a).

Sous forme de diagramme de Venn, voici comment se représenter la situation. Ajoutons les étiquettes !

(2) **symétrique** : Si $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$, alors $\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}$, pour toutes fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

(3) **transitive** : Si $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ et $\frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}$, alors $\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$, pour tous $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$.

DÉMONSTRATION. La plus dure est la dernière, les autres sont en exercice.



□

DÉFINITION 1.3. L'ensemble \mathbb{Q} des nombres *rationnels* est l'ensemble

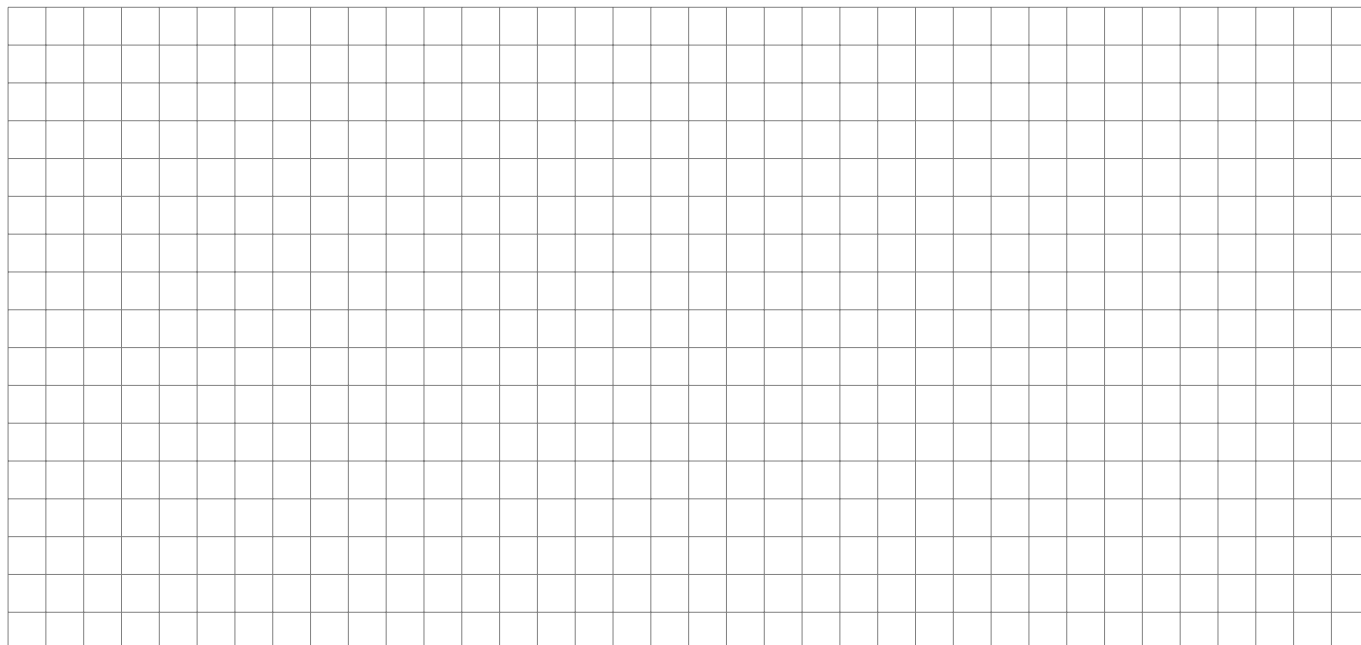
$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a}{b} \text{ est équivalente à } \frac{c}{d} \right\}$$

Le nombre a s'appelle le *numérateur* et b le *dénominateur*. La barre horizontale s'appelle la barre de fraction.

Autrement dit, deux nombres rationnels sont égaux si et seulement s'ils peuvent être représentés par des fractions équivalentes. Formellement un nombre rationnel n'est donc pas une fraction, mais toute une *classe d'équivalence* de fractions (équivalentes). On utilisera la plupart du temps $\frac{1}{2}$ pour le nombre "une demi", mais c'est le même nombre que $\frac{13}{26}$ par exemple.

De fait, à partir de maintenant, lorsqu'on écrit une fraction, on entend le nombre rationnel qu'elle représente et non plus simplement le symbole de fraction. C'est pourquoi on écrit des égalités de fractions même lorsque les symboles de fractions sont seulement équivalents. Par exemple $\frac{1}{2} = \frac{13}{26}$. C'est ce qu'on appelle en mathématiques un *abus de notation* !

EXEMPLE 1.9. La fraction $\frac{54}{60}$ n'est pas irréductible, mais elle est égale à $\frac{9}{10}$, qui est irréductible puisque 9 et 10 sont premiers entre eux.



PROPOSITION 1.10. *Deux fractions sont équivalentes si et seulement si elles ont la même fraction irréductible.*

Avant de passer aux opérations de somme et de produit j'aimerais mettre en évidence un fait que vous avez vu en exercices. La règle de simplification permet de réduire des fractions lorsque numérateur et dénominateur ont un facteur commun, c'est-à-dire qu'ils s'écrivent comme multiples d'un nombre c . On NE PEUT PAS simplifier lorsqu'ils s'écrivent tous deux comme somme ! En général

$$\frac{a+c}{b+c} \neq \frac{a}{b}$$

En effet $(a+c) \cdot b \neq (b+c) \cdot a$ à moins que $c \cdot b = c \cdot a$. Un exemple frappant est donné par

$$2 = \frac{4}{2} = \frac{3+1}{1+1} \neq \frac{3}{1} = 3$$

On illustre ici le fait qu'un contre-exemple donne une preuve qu'une certaine affirmation est fautive. Plutôt que de dire que quelque chose n'est pas toujours vrai, il vaut mieux convaincre en donnant un exemple explicite et irréfutable.

2. La multiplication dans \mathbb{Q}

Nous verrons dans les sections suivantes que \mathbb{Z} est contenu dans \mathbb{Q} et que les opérations de somme et de produit que nous connaissons s'étendent aux nombres rationnels.

REMARQUE 2.1. La fraction $\frac{a}{1}$ représente le quotient $a : 1$, soit le nombre entier a . On écrit donc a pour le nombre rationnel représenté par la fraction $\frac{a}{1}$. De cette manière, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

On veut définir une multiplication sur \mathbb{Q} qui étende celle de \mathbb{Z} et telle que $\frac{a}{b}$ soit le quotient dans \mathbb{Q} de $\frac{a}{1} = a$ par $\frac{b}{1} = b$. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b, d \neq 0$. Si les quotients $a : b$ et $c : d$ existent dans \mathbb{Z} , alors on a dans \mathbb{Z} :

$$(a : b) \cdot (c : d) = (a \cdot c) : (b \cdot d)$$

Ceci conduit à définir :

DÉFINITION 2.2. Soient r, s des nombres rationnels. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ des fractions qui représentent r et s respectivement. Le *produit* de r et s , noté $r \cdot s$, est défini par

$$r \cdot s = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$



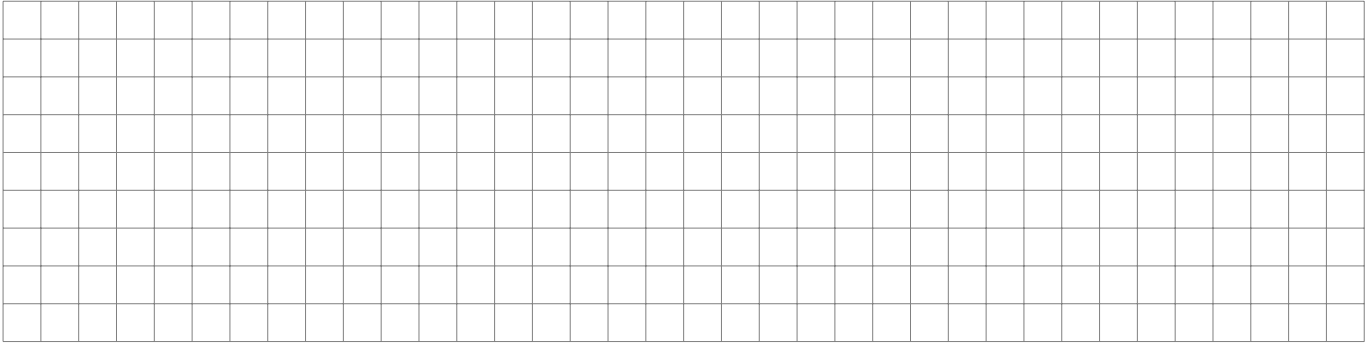
Vérifions maintenant que ce produit a bien les propriétés souhaitées. En particulier il résout le problème de la division dans \mathbb{Z} .

PROPOSITION 2.3. *La multiplication de \mathbb{Q} étend celle de \mathbb{Z} . Dans \mathbb{Q} , la fraction $\frac{a}{b}$ est le quotient de a par b . De plus la fraction $\frac{1}{a}$ est l'inverse du nombre entier non nul a .*

DÉMONSTRATION. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors le produit de a et b dans \mathbb{Q} se calcule comme suit

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1} = a \cdot b$$

C'est bien le produit dans \mathbb{Z} ! Pour montrer ensuite que $\frac{a}{b}$ est le quotient de a par b ,



La dernière vérification est du même tonneau (en exercice). □

Les propriétés des opérations dans \mathbb{Z} que nous avons démontrées précédemment permettent de comprendre les propriétés des opérations que nous avons étendues dans \mathbb{Q} .

PROPOSITION 2.4. Propriétés de la multiplication. *On a*

(1) *Associativité : pour tous $r, s, t \in \mathbb{Q}$,*

$$(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t).$$

(2) *Élément neutre 1 : pour tout $r \in \mathbb{Q}$,*

$$r \cdot 1 = 1 \cdot r = r.$$

(3) *Commutativité : pour tous $r, s \in \mathbb{Q}$,*

$$r \cdot s = s \cdot r.$$

(4) *Existence d'un inverse : tout nombre rationnel non nul admet un inverse multiplicatif, i.e. pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, il existe un unique nombre rationnel, noté r^{-1} , appelé l'inverse de r , tel que*

$$r \cdot r^{-1} = 1.$$

Il est donné par

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

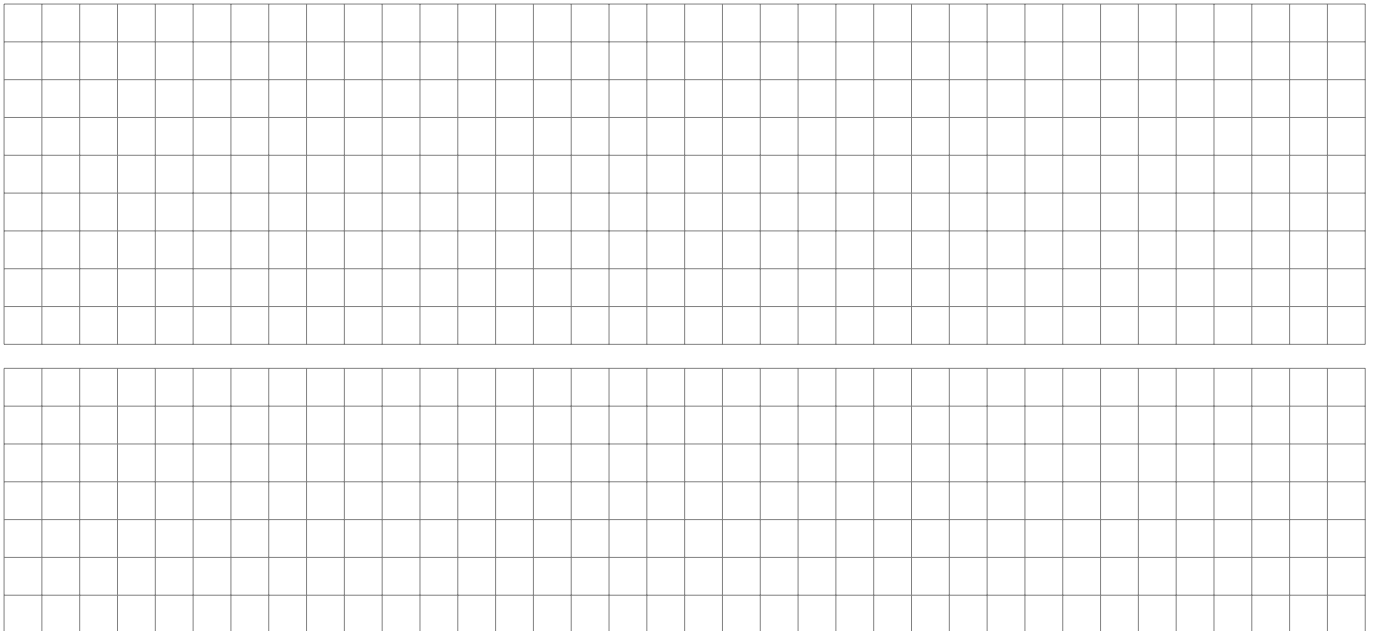
La preuve est facile ! Par exemple le dernier point se vérifie par un simple calcul :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{1}{1} = 1$$

Grâce à tout ce travail, le problème de la division est résolu dans \mathbb{Q} .

PROPOSITION 2.5. *Pour tous $r, s \in \mathbb{Q}$ avec $s \neq 0$, il existe un unique nombre rationnel, noté $r : s$ ou $\frac{r}{s}$, appelé le quotient de r par s tel que*

$$r = (r : s) \cdot s.$$

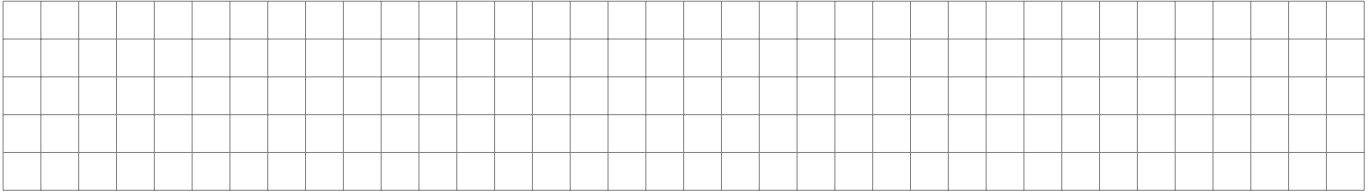


Autrement dit : Dans \mathbb{Q} , diviser, c'est multiplier par l'inverse.

EXEMPLE 2.6. L'inverse de $\frac{7}{4}$ est $\frac{4}{7}$ et $\left(\frac{-5}{3}\right)^{-1} = \frac{-3}{5}$. Ainsi pour diviser par $\frac{-5}{3}$, on multipliera par $\frac{-3}{5}$:

$$\frac{7}{4} : \frac{-5}{3} = \frac{7}{4} \cdot \frac{-3}{5} = \frac{-21}{20}$$

On remarque pour terminer que lors d'une multiplication on peut effectuer des simplifications "croisées". La méthode de calcul pour un produit de fractions est donc en général de réduire chacune des fractions pour les rendre irréductibles, d'effectuer les simplifications croisées possibles, puis finalement de calculer le produit et de le réduire. Par exemple



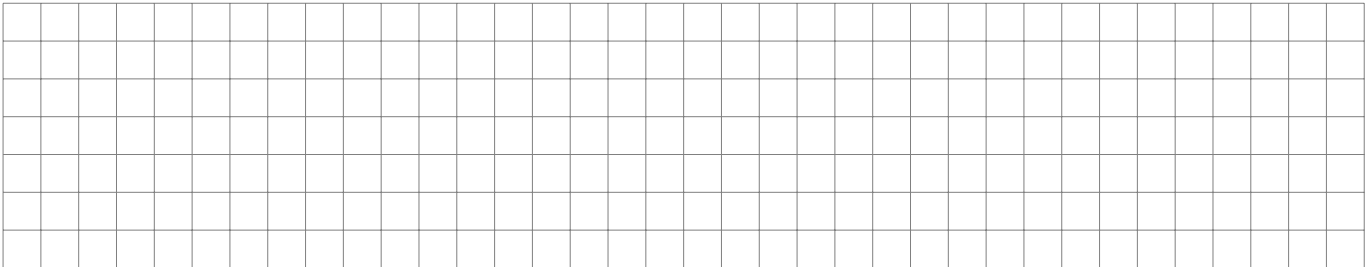
3. L'addition dans \mathbb{Q}

La multiplication a été simple à définir car nous avons utilisé les propriétés du produit dans \mathbb{Z} pour construire \mathbb{Q} . Pour la somme ce sera un peu plus compliqué. On veut définir une addition sur l'ensemble \mathbb{Q} telle que :

- La multiplication se distribue sur l'addition,
- L'addition sur \mathbb{Q} étend celle de \mathbb{Z} , c'est-à-dire que la somme $\frac{a}{1} + \frac{b}{1}$ doit être égale à $a + b$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$.

Donc si une telle addition existe et que $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}$ sont deux fractions ayant le même dénominateur, alors

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

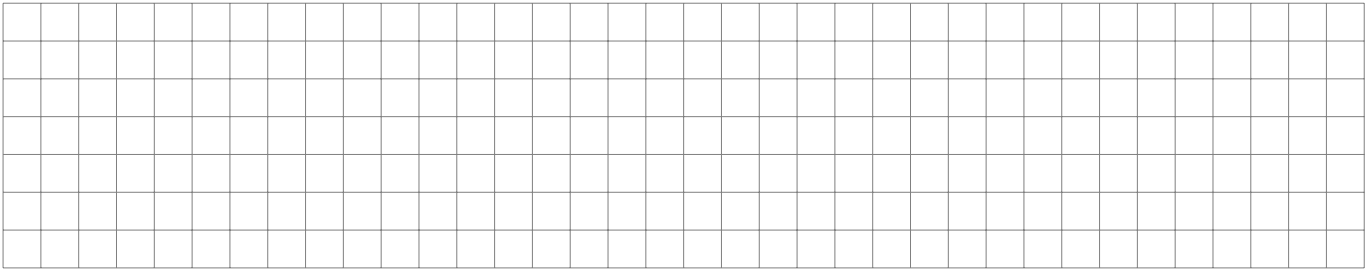


Pour additionner deux fractions, il suffira donc de prendre deux fractions équivalentes qui ont le même dénominateur, puis sommer les numérateurs et garder ce dénominateur commun.

DÉFINITION 3.1. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions. Alors la *somme* de ces deux fractions est égale à

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

EXEMPLE 3.2. On calcule



Le dénominateur de la somme est un multiple commun des dénominateurs, par exemple leur produit, mais leur ppmc est le choix le plus économique! Comme dans le cas de la multiplication on économise de l'énergie si on rend d'abord les fractions irréductibles avant de les additionner :

$$\frac{56}{49} + \frac{-6}{8} = \frac{8}{7} + \frac{-3}{4} = \frac{32 - 21}{28} = \frac{11}{28}$$

Attention : on ne peut pas simplifier en diagonale! C'est tentant, bien sûr, mais très, très faux. Par exemple

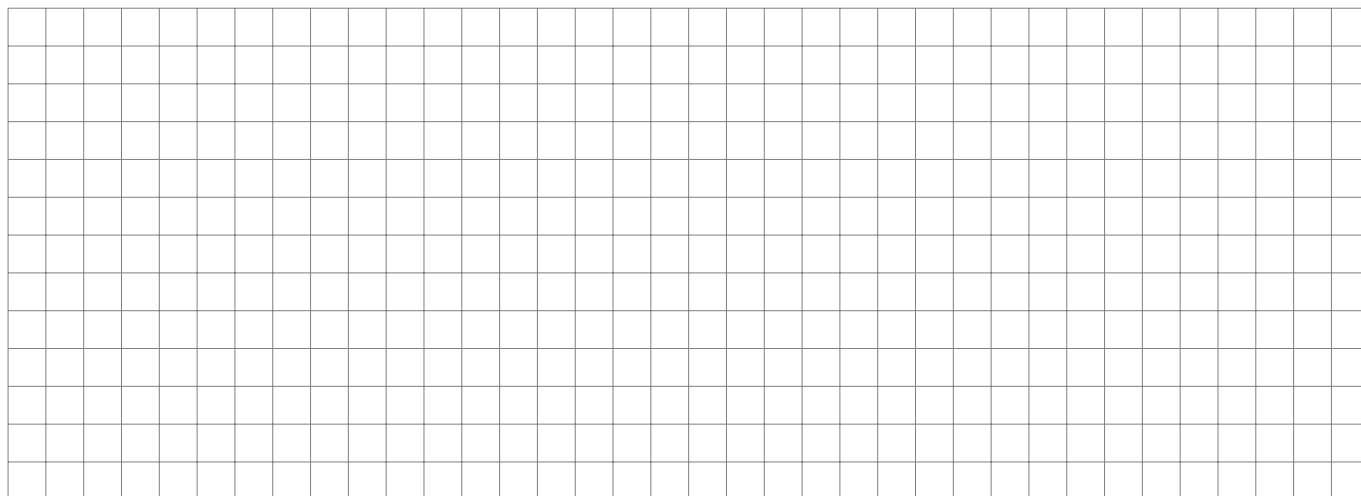
$$\frac{10}{3} = \frac{3}{1} + \frac{1}{3} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$$

REMARQUE 3.3. L'addition de deux nombres rationnels r et s est bien définie : elle ne dépend pas du choix des fractions qui représentent r et s . On peut montrer que si $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont équivalentes, et $\frac{c}{d}$ et $\frac{c'}{d'}$ sont équivalentes, alors leur somme $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ et $\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$ sont aussi équivalentes. Saurais-tu le démontrer?

PROPOSITION 3.4. **Propriétés de l'addition.** *L'addition dans \mathbb{Q} a les propriétés suivantes :*

- (1) *Associativité : pour tous $r, s, t \in \mathbb{Q}$, on a $(r + s) + t = r + (s + t)$.*
- (2) *Commutativité : pour tous $r, s \in \mathbb{Q}$, on a $r + s = s + r$.*
- (3) *Elément neutre 0 : pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $r + 0 = r = 0 + r$.*
- (4) *Existence de l'opposé : pour tout rationnel r , il existe un unique rationnel noté $-r$, appelé l'opposé de r , tel que $r + (-r) = 0$.*
- (5) *Distributivité de la multiplication sur l'addition : pour tous $r, s, t \in \mathbb{Q}$, on a $r \cdot (s + t) = (r \cdot s) + (r \cdot t)$.*

DÉMONSTRATION. Montrons l'associativité, l'une des propriétés les plus embêtantes parce qu'elle concerne trois nombres. On considère trois nombres rationnels r, s, t .

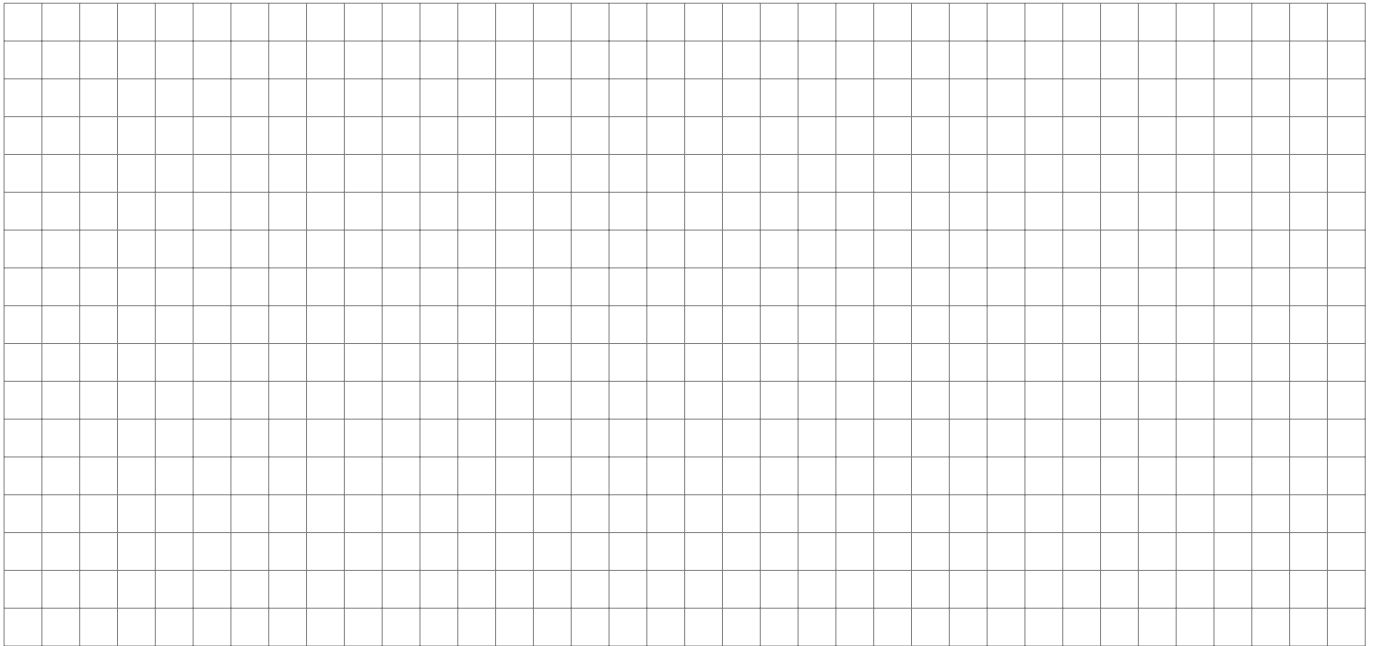


Pour montrer l'existence de l'opposé, il suffit de constater que l'opposé de la fraction $\frac{a}{b}$ est donné par $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$. \square

REMARQUE 3.5. L'addition de \mathbb{Q} a les mêmes propriétés (1)-(4) que celle de \mathbb{Z} . Les nombres rationnels, munis de l'addition, forment un groupe abélien. Ajoutons maintenant la multiplication. Elle aussi a les mêmes propriétés que celle de \mathbb{Z} si bien qu'en ajoutant la distributivité (5), on constate que \mathbb{Q} , avec sa somme et son produit, forme un anneau commutatif. Il y a mieux encore ! La nouveauté de la multiplication dans \mathbb{Q} par rapport à celle de \mathbb{Z} est que tout nombre non nul possède un inverse. Un anneau commutatif qui a cette propriété supplémentaire s'appelle un *corps*.

Remarquons encore que la soustraction dans \mathbb{Q} a les mêmes propriétés que celle de \mathbb{Z} . En particulier, la soustraction est toujours possible et soustraire c'est additionner l'opposé. Pour tous rationnels r, s , on a $r - s = r + (-s)$.

Avant de se lancer tête baissée dans les calculs, on se demandera toujours s'il y a des simplifications de fractions à effectuer auparavant, éventuellement des simplifications "croisées" pour des produits.



Un premier aperçu des nombres réels

Après les nombres rationnels, nous abordons de manière superficielle les nombres réels par leur représentation sous forme de “nombre à virgule”. Notre but est de comprendre quelle est l’écriture décimale des nombres rationnels et comment on les distingue des nombres réels qui ne sont pas rationnels.

1. Notation et exemples

Lorsqu’on parle d’écriture décimale cela signifie que l’on écrit les nombres avec le système positionnel en base 10. Rappelons que tout nombre entier a admet une unique écriture décimale. Si $a = \pm n$, $n \in \mathbb{N}$, n peut s’écrire comme une unique suite de k chiffres

$$a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

où $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour tout $0 \leq i \leq k$ et $a_k \neq 0$ si $k \neq 0$. Cela signifie que

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0.$$

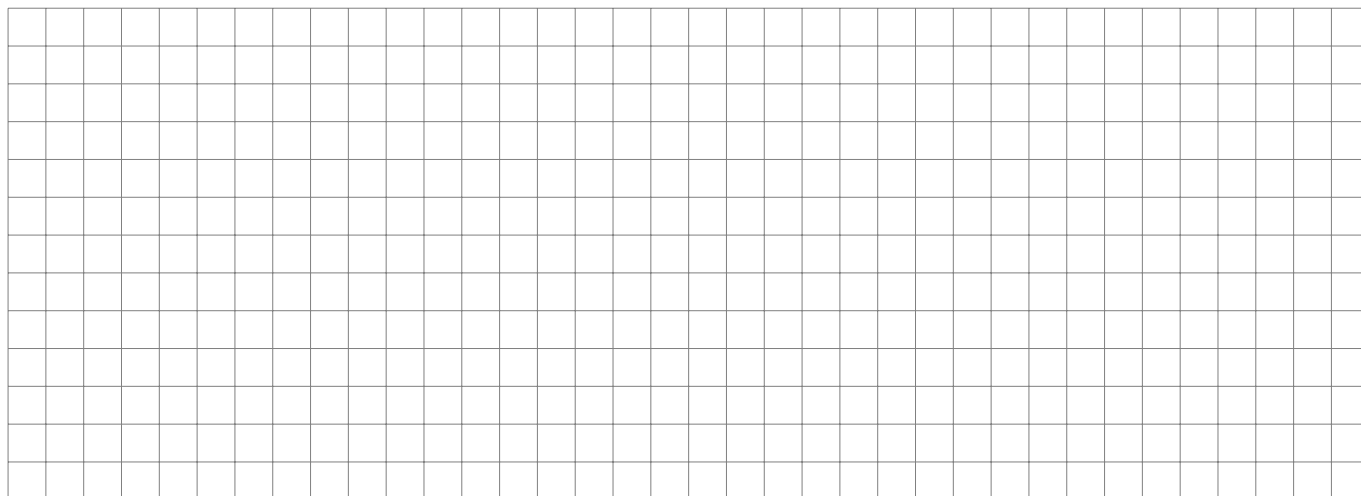
Par exemple, l’écriture décimale 3708 signifie $3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$.

Une telle somme doit toujours avoir un nombre fini de facteurs sinon elle “diverge”, i.e. elle a une valeur infinie. Autrement dit, un nombre entier a toujours un nombre fini de chiffres en écriture décimale.

La convention que l’on a utilisé ci-dessus est que les chiffres représentent le nombre de certaines puissances de 10, de plus en plus grandes lorsqu’on se déplace de droite à gauche. La convention que nous adoptons donc lorsque nous voulons écrire des nombres qui ne sont pas entiers est de continuer le développement décimal en indiquant ceci par une virgule et les chiffres après la virgule donnent le nombre de puissances de $10^{-1} = \frac{1}{10}$. Ainsi, le nombre 4762,23458 s’écrit

$$4 \cdot (10)^3 + 7 \cdot (10)^2 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 4 \cdot \frac{1}{10^3} + 5 \cdot \frac{1}{10^4} + 8 \cdot \frac{1}{10^5}$$

EXEMPLE 1.1. Le nombre $\frac{3}{4}$, “trois quarts”, s’écrit aussi 0,75.



Dans les exemples étudiés il y a un nombre fini de chiffres après la virgule. Mais on peut se poser la question de savoir si cela a un sens d'écrire une infinité de chiffres après la virgule ? Est-ce que cela peut donner une valeur finie ? Si l'écriture décimale est infinie, le nombre correspond à une somme infinie de fractions. En effet

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \dots$$

On peut montrer qu'une telle somme est toujours finie, mais seulement certaines de ces sommes sont des nombres rationnels. Les autres sont des nombres réels *irrationnels* (que nous n'avons pas défini pour l'instant).

Un exemple est donné par la fraction "un tiers". J'affirme que $\frac{1}{3} = 0,333\dots =: 0,\bar{3}$. On dit "zéro virgule trois *périodique*". Comment se peut-il qu'il y ait un nombre de chiffres infini après la virgule alors que c'était impossible pour les chiffres avant la virgule ? Ici

$$0,\bar{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = \frac{333}{1000} + \dots = \frac{3333}{10000} + \dots$$

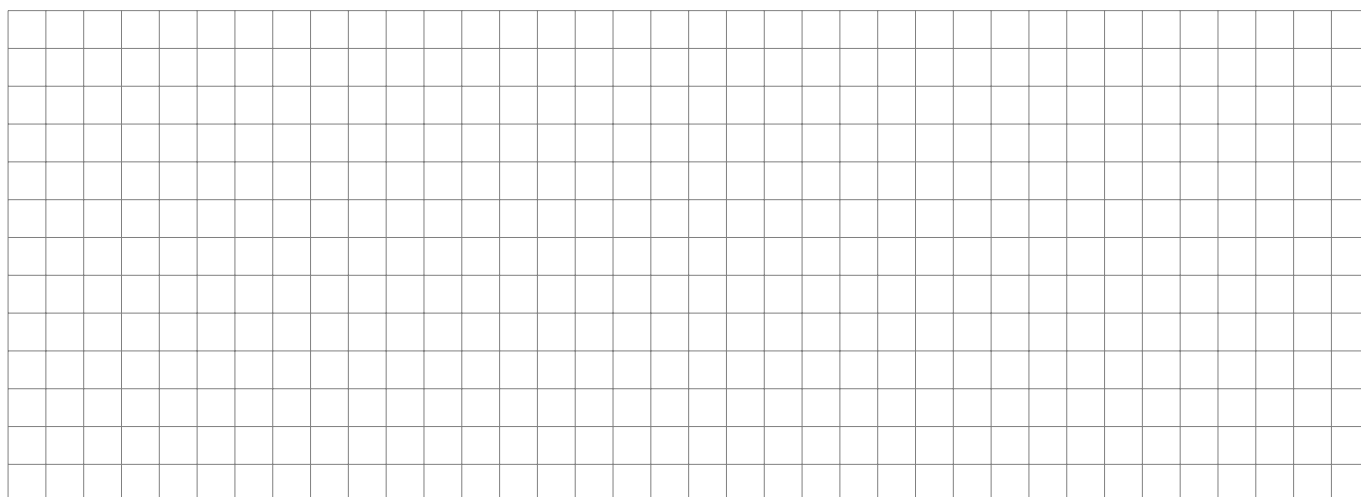
Le dénominateur est presque égal au triple du numérateur, mais il faudra ajouter un nombre infini de puissances de plus en plus grandes de $\frac{1}{10}$ (des nombres rationnels de plus en plus petits !) pour y arriver.

Il ne faudra pas connaître la preuve par coeur, mais il est important de savoir écrire un nombre rationnel selon ces deux systèmes.

PROPOSITION 2.2. *Tout nombre rationnel admet une écriture décimale finie ou périodique. Inversement, toute écriture décimale finie ou périodique est un nombre rationnel.*

On commence par étudier le cas des nombres décimaux. On affirme que si le dénominateur b d'une fraction $\frac{a}{b}$ est un diviseur d'une puissance de 10, i.e. $b = 2^k \cdot 5^m$, $k, m \in \mathbb{N}$, alors l'écriture décimale est finie. Il suffit en effet de multiplier ce nombre rationnel par 10^M où M est le maximum de k et m pour trouver un nombre entier !

EXEMPLE 2.3. Si le dénominateur vaut $8 = 2^3$, il faut multiplier le nombre par



Lorsque le dénominateur est une puissance de 10 (et pas seulement un diviseur comme ci-dessus), le procédé est plus transparent. Par exemple $\frac{37}{1000} = 0,037$.

Le sens inverse est bien plus simple ! Tout nombre décimal est un nombre rationnel dont la fraction irréductible a un dénominateur qui est un diviseur d'une puissance de 10. En effet si un nombre décimal a k chiffres après la virgule, il suffit de le multiplier par 10^k pour trouver un nombre entier.



Par conséquent $\frac{1}{7} = 0,1428571428571 \dots = 0,\overline{142857}$. Nous avons choisi le cas le plus long puisque tous les restes possibles apparaissent !

COROLLAIRE 2.7. *Si le dénominateur de la fraction irréductible d'un nombre rationnel n'est pas un diviseur d'une puissance de 10, alors son écriture décimale est périodique et la longueur de la période est strictement inférieure au dénominateur (de la fraction irréductible).*

Une écriture décimale infinie non périodique ne peut pas donc jamais provenir d'un nombre rationnel.

Pour terminer notre étude nous devons encore expliquer comment transformer un nombre périodique en une fraction. La méthode est basée sur l'astuce qui nous a permis de comprendre ci-dessus pourquoi $\frac{1}{3}$ est égal à $0,\overline{3}$.

Soit r un nombre périodique, sa période étant k . Par exemple $0,\overline{3}$ est de période 1, mais $173,1741574157415 \dots = 173,1\overline{7415}$ est de période 4. On procède pas à pas :

(1) On multiplie le nombre par 10^k . Pour l'exemple précédent on calcule donc

$$10^4 \cdot 173,1\overline{7415} = 1731741,5\overline{7415}$$

- (2) Pour faire disparaître la partie périodique de ce nombre on le soustrait au résultat précédent. On calcule donc $10^k - 1$ fois r . Ici

$$9999 \cdot 173,1\overline{7415} = 1'731'741,5\overline{7415} - 173,1\overline{7415} = 1'731'568,4$$

- (3) Si ce nombre n'est pas entier on le multiplie par une puissance de 10 pour le rendre entier. Ici

$$99'990 \cdot 173,1\overline{7415} = 17'315'684$$

- (4) On isole le nombre qui nous intéresse dans cette égalité. On trouve ainsi une expression fractionnaire pour r dont le dénominateur est une puissance de 10 qui multiplie une autre puissance de 10 moins un. Le problème est alors de réduire cette fraction. Dans notre cas

$$173,1\overline{7415} = \frac{17'315'684}{99'990} = \frac{8'657'842}{49'995}$$

REMARQUE 2.8. En sommant un nombre infini de nombres rationnels, on peut obtenir un nombre réel fini irrationnel. Par exemple le nombre

$$0,123456789101112131415161718192021 \dots$$

n'est ni décimal, ni périodique. Il ne provient donc d'aucune fraction! Il en va de même du nombre

$$0,1010010001000010000010000001000000 \dots$$

Il y a d'autres nombres célèbres et utiles en mathématiques qui ne sont pas rationnels. C'est le cas de π et e , que nous verrons dans une année, mais il est plus difficile de *démontrer* que leur écriture décimale n'est pas périodique...

