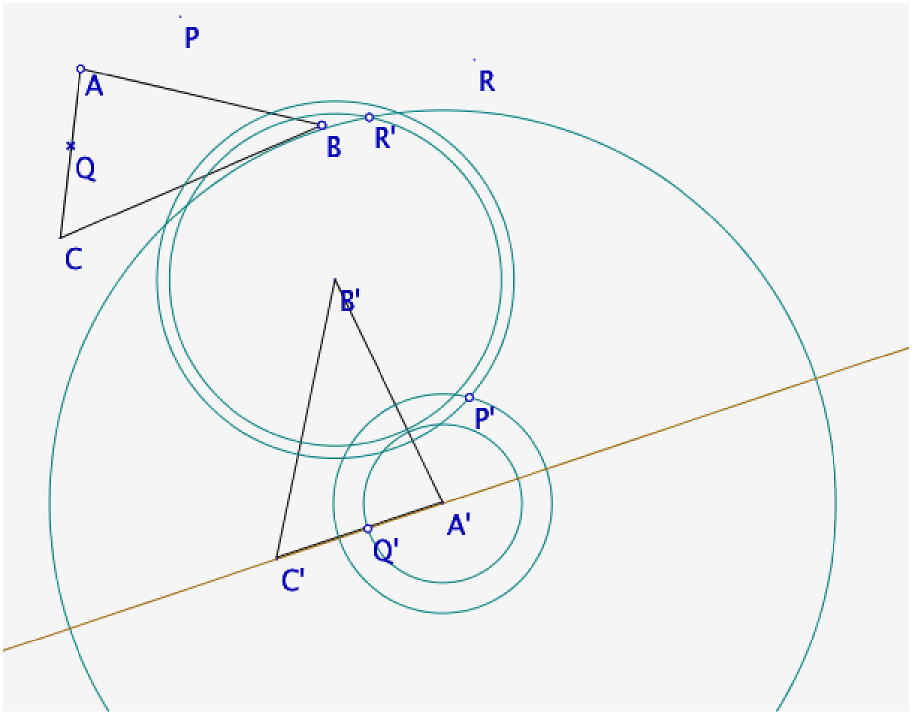
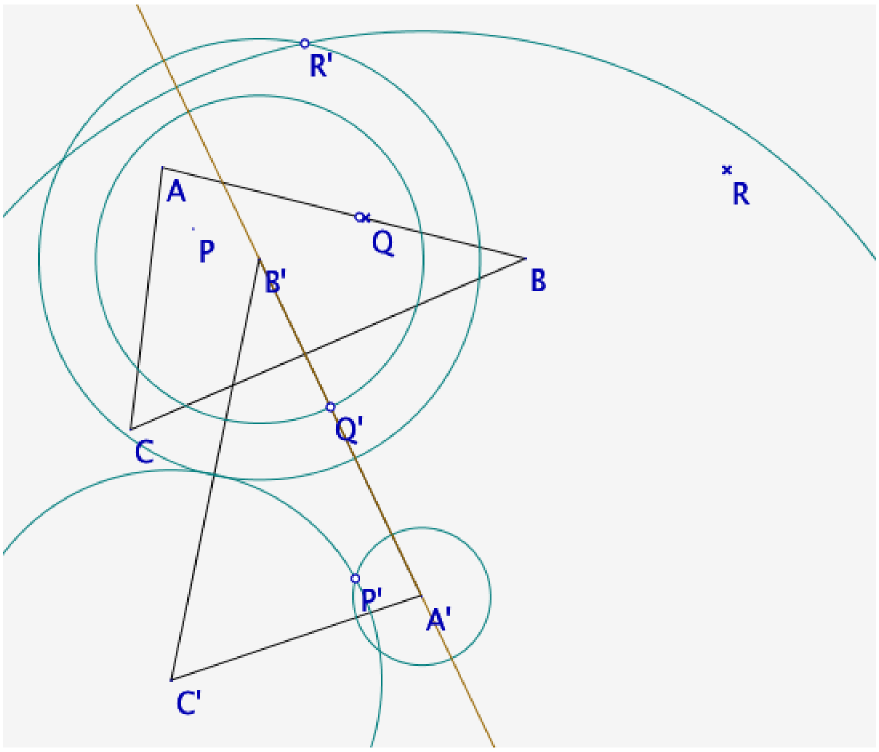
Cours Euler: Corrigé 15

11 décembre 2024

Exercice 1

1)





2) On se donne un triangle ABC et son image $A'B'C'$. Soit S un point dont on veut construire l'image S'.

Marche à suivre.

1. Choisir un côté du triangle dont le support ne contient pas S, disons $[AB]$.
2. Tracer les cercles $C(A', \overline{AS})$ et $C(B', \overline{BS})$. Ces cercles se coupent en deux points P et Q qui sont de part et d'autre de la droite $A'B'$.
3. Si S se trouve dans le même demi-plan de frontière AB que C, alors l'image de S est le point construit qui se trouve dans le même demi-plan de frontière $A'B'$ que C', si S ne se trouve pas dans le même demi-plan de frontière AB que C, alors l'image de S est le point construit qui ne se trouve pas dans le même demi-plan de frontière $A'B'$ que C'.

Une autre méthode, plus rapide, est possible dans le cas où le point S est sur le support de l'un des côtés du triangle. Si S est l'un des sommets, alors nous connaissons déjà son image. Supposons que S n'est pas un sommet et qu'il appartienne au support d'un côté, disons BC.

Marche à suivre.

1. Tracer la droite $d = B'C'$.
2. Tracer le cercle $C(B', \overline{BS})$. Ce cercle coupe la droite d en deux points de part et d'autre de B' et S' est l'un de ces points.
3. Si S est sur la même demi-droite d'extrémité B et de support BC que C, alors S' est sur la même demi-droite d'extrémité B' et de support $B'C'$ que C'. Sinon, alors S' est sur l'autre demi-droite d'extrémité B' et de support $B'C'$ que C'.

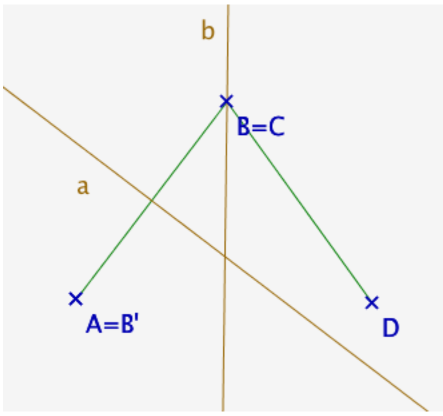
3) Soient ABC un triangle, $A'B'C'$ son image sous l'isométrie f et S un point quelconque du plan. Nous justifions d'abord la méthode générale et puis la méthode plus simple au cas où S appartient au support d'un des côtés de ABC.

— Supposons que S n'appartienne pas au support du côté $[AB]$. Alors nous savons d'après l'axiome de construction des triangles qu'en prenant les trois segments $[A'B'], [AS]$ et $[BS]$ qui remplissent $|\overline{AS} - \overline{BS}| < \overline{A'B'} < \overline{AS} + \overline{BS}$ (parce que S n'est pas sur AB) il existe deux points P et Q tels que $\overline{A'P} = \overline{A'Q} = \overline{AS}$ et $\overline{B'P} = \overline{B'Q} = \overline{BS}$. Les isométries conservent les demi-plans, c'est-à-dire que si H^1 et H^2 sont les demi-plans de frontière AB, alors leur images seront respectivement les demi-plans $H^{1'}$ et $H^{2'}$ de frontière $A'B'$. Ainsi l'image de $S \in H^1$ (respectivement H^2) sera le point construit qui appartient à $H^{1'}$ (respectivement $H^{2'}$).

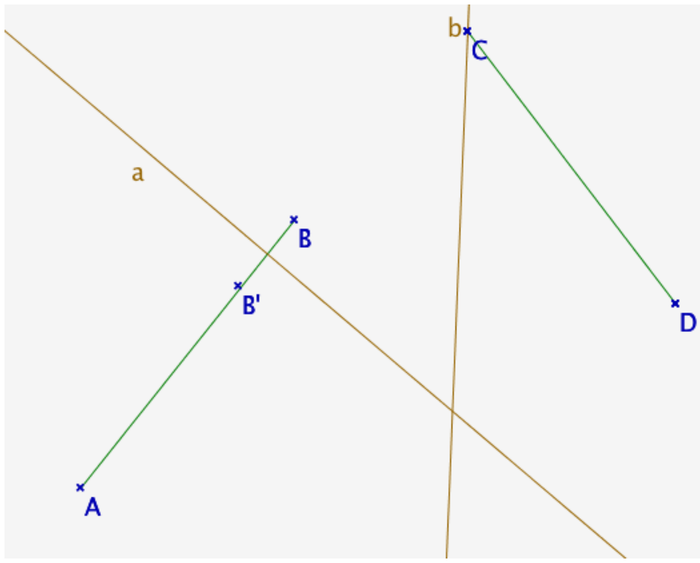
— Supposons qu'il existe un côté de ABC dont le support contient S, supposons que $[AB]$ est ce côté et que $S \neq A$. Il existe deux points P et Q qui appartiennent à $A'B'$ de part et d'autre de A tels que $\overline{A'P} = \overline{A'Q} = \overline{AS}$. Supposons sans perte de généralité que P appartient à la même demi-droite d'extrémité A' que B' et que Q appartient à l'autre demi-droite d'extrémité A. Etant donné que les isométries conservent les demi-droites, si S appartient à la même demi-droite d'extrémité A que B alors S' sera le point P sinon ce sera le point Q.

Exercice 2

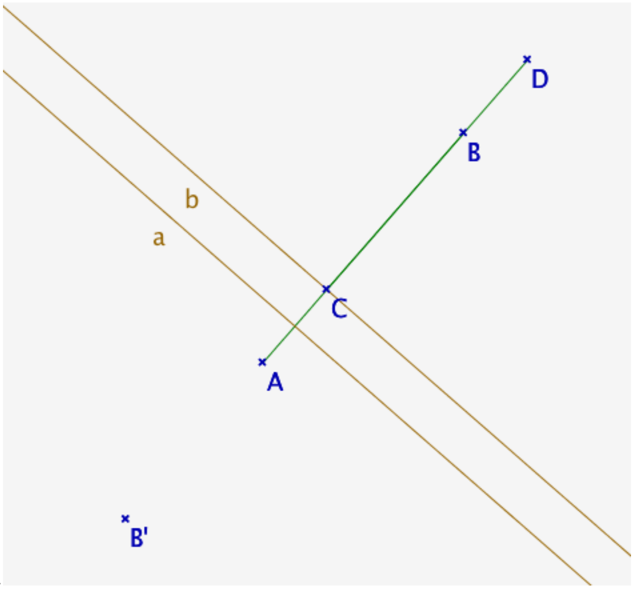
1) On trace la médiatrice a de A et son image, c'est-à-dire C par convention. La réflexion associée à cette médiatrice envoie B sur B'. On trace alors la médiatrice b entre B' et l'autre extrémité du segment, ici D. Cette médiatrice passe par C, car comme les isométries préservent les distances nous avons $\overline{CD} = \overline{CB'}$. Et ainsi $S_b(B') = D$ et $S_b(C) = C$, donc $S_b \circ S_a$ envoie $[AB]$ sur $[CD]$.

1.


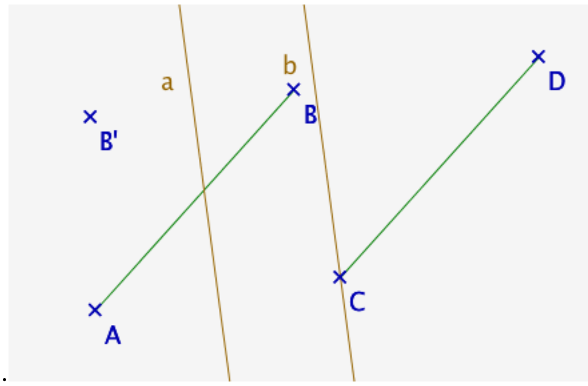
$f = S_b \circ S_a$

2.


$f = S_b \circ S_a$

3.


$f = S_b \circ S_a$

4.


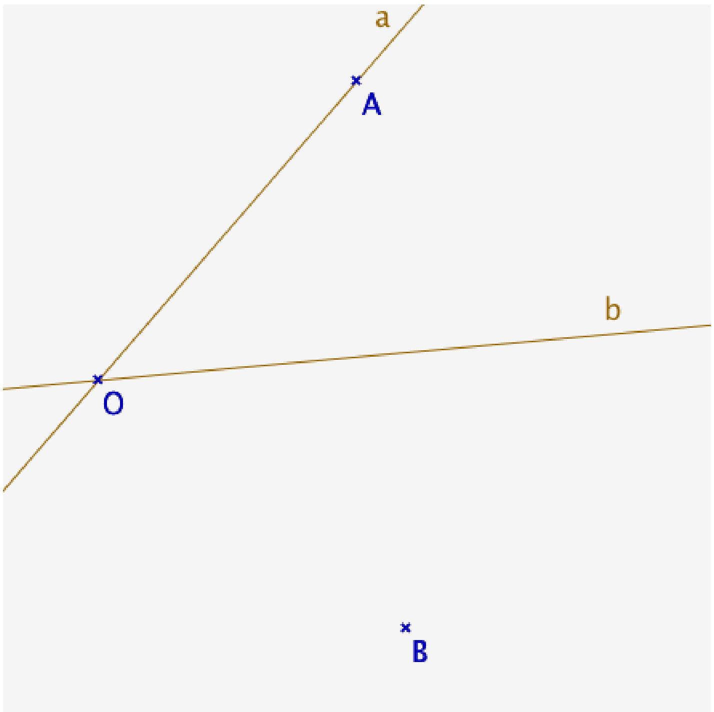
$f = S_b \circ S_a$

2) Par le lemme, pour trouver cette deuxième isométrie, il suffit de pré-composer l'isométrie par S_{AB} ou de la post-composer par S_{CD}.

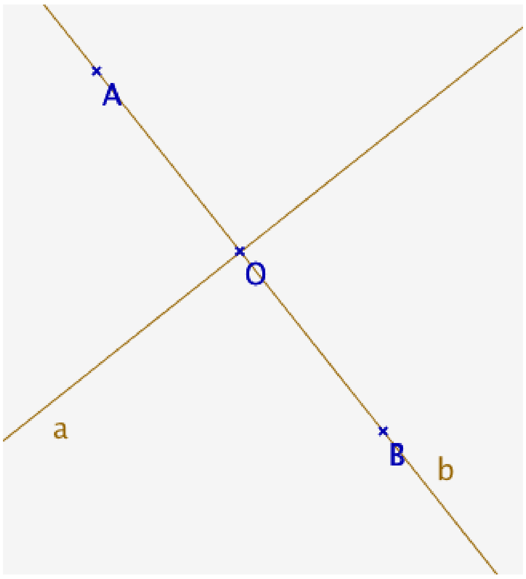
Non, il n'est pas toujours possible que l'une des deux isométrie soit une rotation, en effet dans le cas où les segments sont parallèles et de même sens (voir exemples 3 et 4 ci-dessus), l'isométrie qui envoie $[AB]$ sur $[CD]$ est la composition de deux réflexions dont les axes sont parallèles entres eux, mais comme on a vu qu'une isométrie est une rotation si et seulement si c'est une composition de deux réflexions dont les axes ont au moins un point en commun, cette isométrie ne sera pas une rotation. De plus, en trouvant la deuxième isométrie qui envoie $[AB]$ sur $[CD]$ à l'aide de la méthode citée ci-dessus, nous aurions une composition de trois réflexions, ce qui n'est pas une rotation. En effet, nous avons vu en cours qu'une composition d'un nombre pair de réflexions préserve l'orientation alors qu'un nombre impair de rotation ne préserve pas les orientations, ainsi une composition de trois réflexions ne peux pas être égale à une composition de deux réflexions.

Exercice 3

1)



2)



3) Premièrement, par définition, une symétrie centrale n'a qu'un seul point fixe, le centre de symétrie. C'est donc bien une rotation. Pour la suite de la démonstration, nous proposons deux approches. La preuve 1 utilise la construction des axes vue en cours. La preuve 2 fait un raisonnement direct.

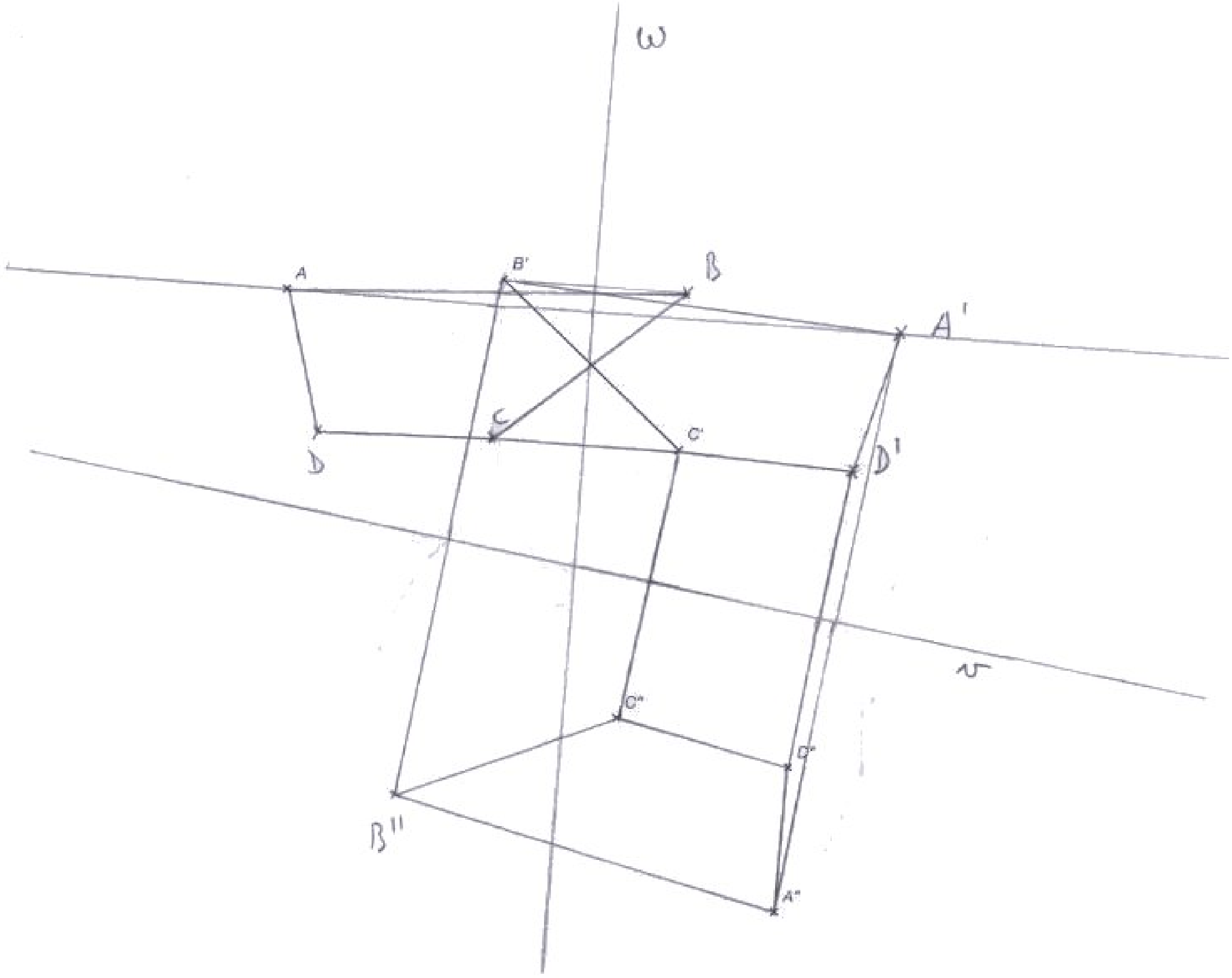
Preuve 1. On a vu que l'on obtient une rotation $\mathcal{R}$ non-nulle de centre O de la manière suivante : on choisit $A \neq O$ et soit A' son image. On pose $a = OA$ et b la médiatrice de $[AA']$. Alors $\mathcal{R} = S_b \circ S_a$. Dans le cas d'une symétrie centrale, $A' \in OA$ et donc $OA = AA'$. Donc b est perpendiculaire à a.

Preuve 2. Comme S_O est une symétrie centrale de centre O, c'est une rotation de centre O, nous pouvons donc choisir arbitrairement le premier axe passant par O, prenons donc l'unique droite a passant par un point A distinct de O et son image par S_O que l'on note $A' = S_O(A)$. Comme O

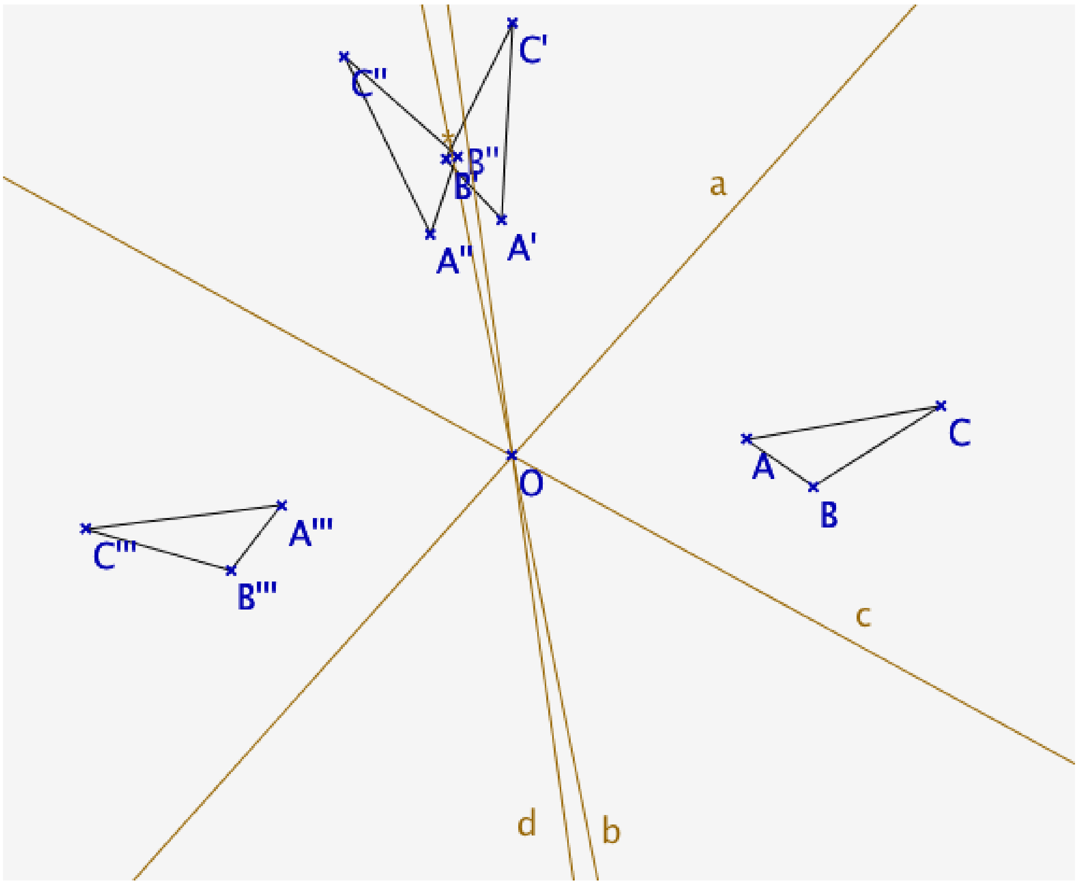
est le milieu de $[AA']$, $O \in a$. Soit b la droite telle que $S_O = S_b \circ S_a$, on a $S_O(A) = S_b \circ S_a(A) = S_b(A) = A' \Leftrightarrow b$ est la médiatrice de $[AA']$. On a donc b perpendiculaire à a.

Exercice 4

On sait que C'' est l'image de C' par une des symétries. Donc l'un des axes de symétrie est la médiatrice de $C'C''$. Ainsi on peut tracer le quadrilatère $A'B'C'D'$.
Ensuite on sait que A' est l'image de A par une des symétries. Donc l'autre axe de symétrie est la médiatrice de $A'A$. On peut alors tracer le quadrilatère $ABCD$.



Exercice 5



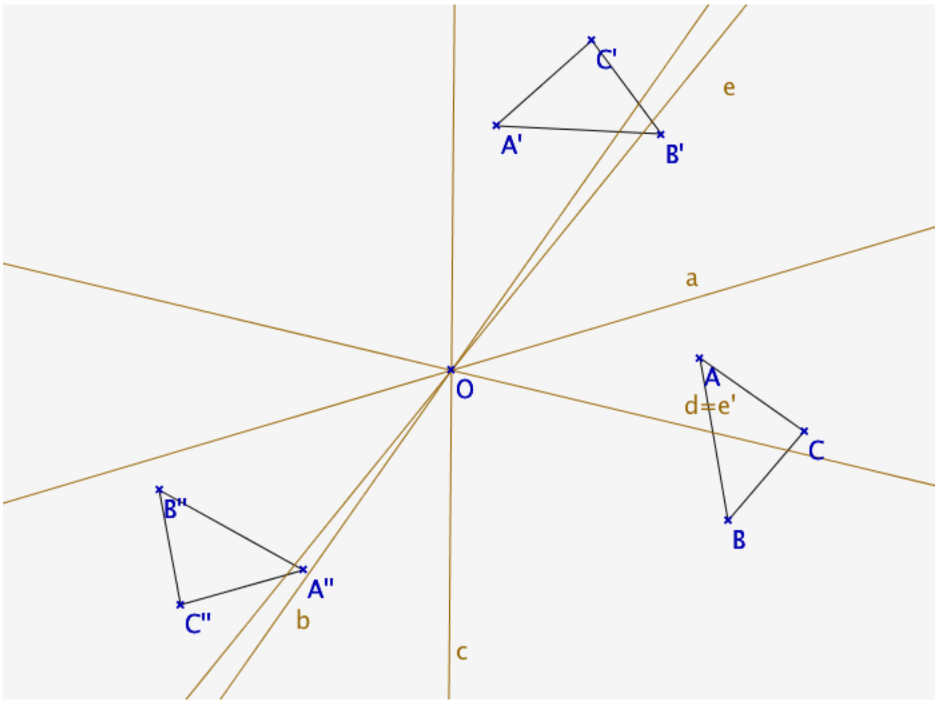
Nous remarquons que le résultat est le même que si nous avions construit l'image de ABC sous une réflexion. Pour construire cet axe, il suffit de construire la médiatrice entre un des points de ABC et de son image $A'''B'''C'''$.
Comme $S_c \circ S_b \circ S_a = (S_c \circ S_b) \circ S_a$ où c et b sont des droites concourantes en O. Ainsi $S_c \circ S_b$ est une rotation de centre O. D'après le cours, nous pouvons choisir la première droite arbitrairement et obtenir la même rotation. Ainsi si nous choisissons astucieusement a elle-même comme première droite ! Il existe alors une droite d dans le plan telle que $S_c \circ S_b = S_d \circ S_a$, et ainsi :

$$S_c \circ S_b \circ S_a = (S_d \circ S_a) \circ S_a = S_d \circ (S_a \circ S_a) = S_d.$$

C'est donc bien une réflexion.

Exercice 6

Notons $A'B'C'$ l'image de ABC par R et $A''B''C''$ l'image de $A'B'C'$ par R'.

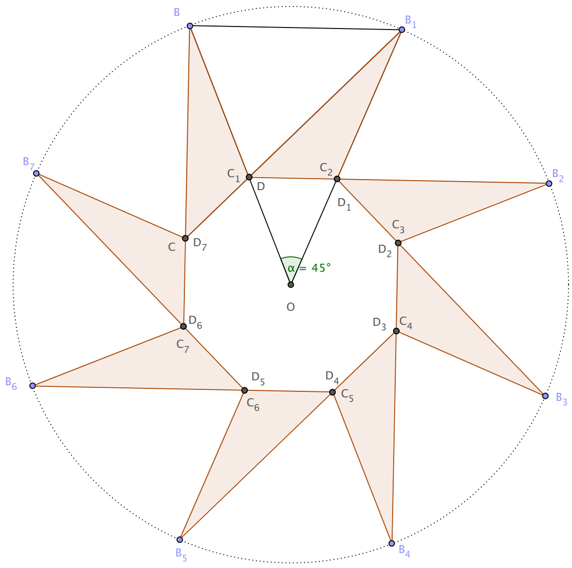


On constate que le résultat est le même que si nous avions construit l'image de ABC par une rotation de centre O.
Comme nous pouvons choisir l'un des axes de chaque rotation arbitrairement à la seule condition qu'ils se coupent en O, nous pouvons choisir comme deuxième axe de R la droite c et ainsi il existe e une droite du plan telle que $\mathcal{R} = S_c \circ S_e$. Or,

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = S_d \circ S_c \circ S_c \circ S_e = S_d \circ S_e$$

où e et d sont deux droites concourantes en O. Le résultat est donc bien une rotation de centre O.

Exercice 7



Le triangle isocèle OAB a un angle de 45° au sommet O si bien que les deux autres angles valent 67,5°. Le triangle ABC est un triangle rectangle en B si bien que les angles en A et C valent 45°. L'angle $\widehat{COD}$ vaut 45° car le triangle OCB est isométrique au triangle ODA...