Cours Euler: Série 15

11 décembre 2024

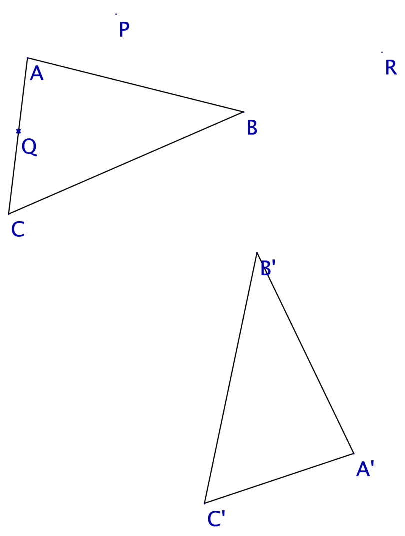
Exercice 1

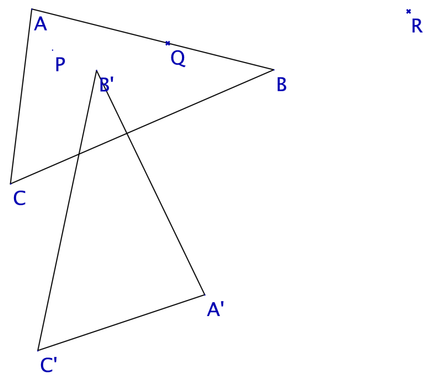
Chaque figure ci-dessous montre l'effet d'une isométrie sur un triangle ABC. On a démontré au cours que cela suffit à déterminer l'action de l'isométrie sur tous les points du plan. Nous allons voir maintenant comment construire l'image d'un point P quelconque sur la base de l'image d'un triangle ABC.

1) Pour les deux isométries, construis l'image des points P, Q et R (R est aligné avec $[BC]$).

2) Donne une marche-à-suivre pour obtenir l'image d'un point S quelconque du plan sous une isométrie f sachant que le triangle $A'B'C'$ est l'image d'un triangle ABC sous f.

3) Justifie ta méthode.
Indication. Utiliser les axiomes de construction des triangles et de report d'un segment sur une demi-droite.

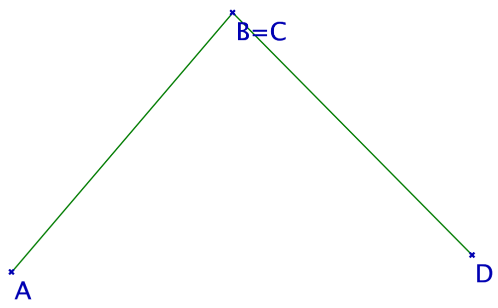


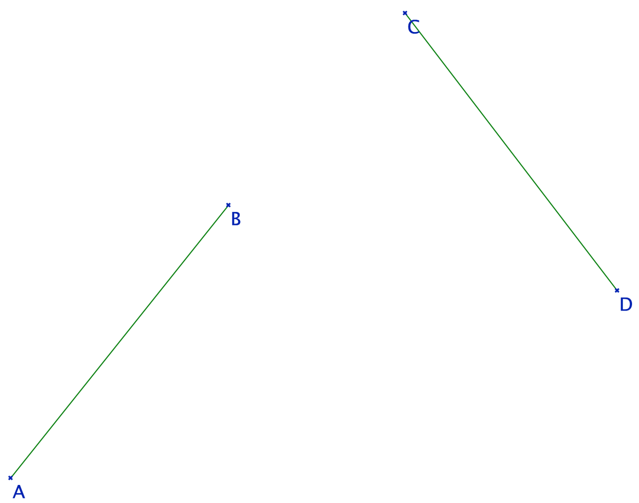


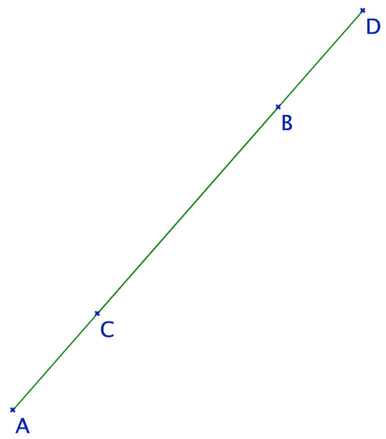
Exercice 2

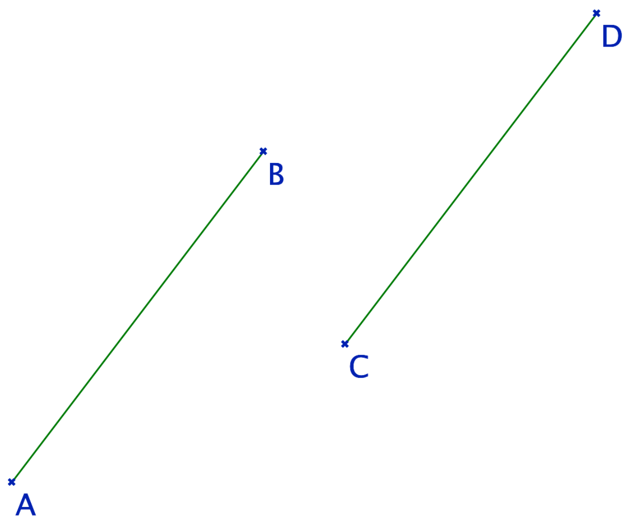
Relis attentivement le lemme qui traite des isométries transformant un segment en un autre segment isométrique. Dans les quatre figures suivantes, les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont de même longueur.

1) On veut passer de $[AB]$ à $[CD]$ (en transformant A en C et B en D) par une composée d'un minimum de réflexions. Construis les axes de ces réflexions et identifie-les sur la figure par une lettre minuscule. Donne ensuite l'isométrie sous la forme $f = Id$, $f = S_a$ ou $f = S_b \circ S_a$ suivant le nombre d'axes dont tu as eu besoin (attention à l'ordre des symétries !).


B=C
A
D


C
B
D
A


D
B
C
A

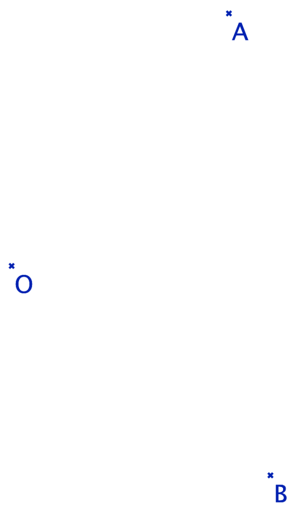

D
B
C
A

2) Le lemme cité en introduction affirme qu'il existe exactement deux isométries transformant A en C et B en D. Pour chaque figure, tu as déterminé une isométrie f. Décris maintenant l'autre isométrie qui fait cette même transformation, sous la forme de composition de réflexions. Est-il toujours possible que l'une des deux isométries soit une rotation ?

Exercice 3

Relis attentivement la preuve de la proposition du cours qui affirme qu'une isométrie est une rotation si et seulement si c'est la composée de deux réflexions d'axes ayant au moins un point en commun. Souviens-toi que le choix du premier axe de symétrie est libre et profite de choisir au moins l'un des deux axes de manière économique !

1) Le point B est l'image de A sous une rotation $\mathcal{R}$ de centre O. Construis une paire d'axes a et b telle que $\mathcal{R} = S_b \circ S_a$.



2) Le point B est l'image de A sous une symétrie centrale S. Construis le centre de symétrie et une paire d'axes a et b telle que $S = S_b \circ S_a$

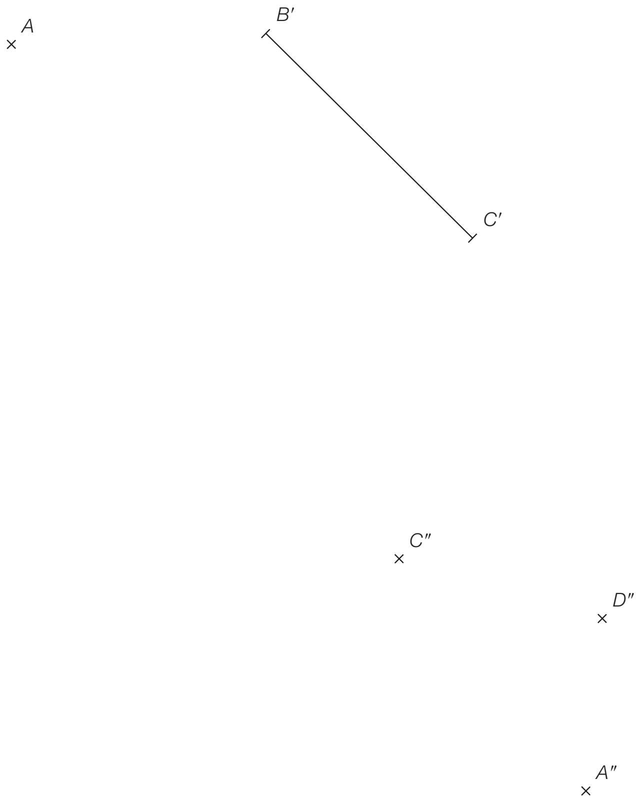
3) Démontre qu'une symétrie centrale S de centre O est une rotation de centre O (tu dois utiliser la définition de rotation du cours, pas un théorème ou une notion intuitive de rotation !). Que peux-tu dire des axes de deux réflexions S_a et S_b tels que $S = S_b \circ S_a$ dans ce cas ? Prouve-le.

Exercice 4

143. Reconstitution

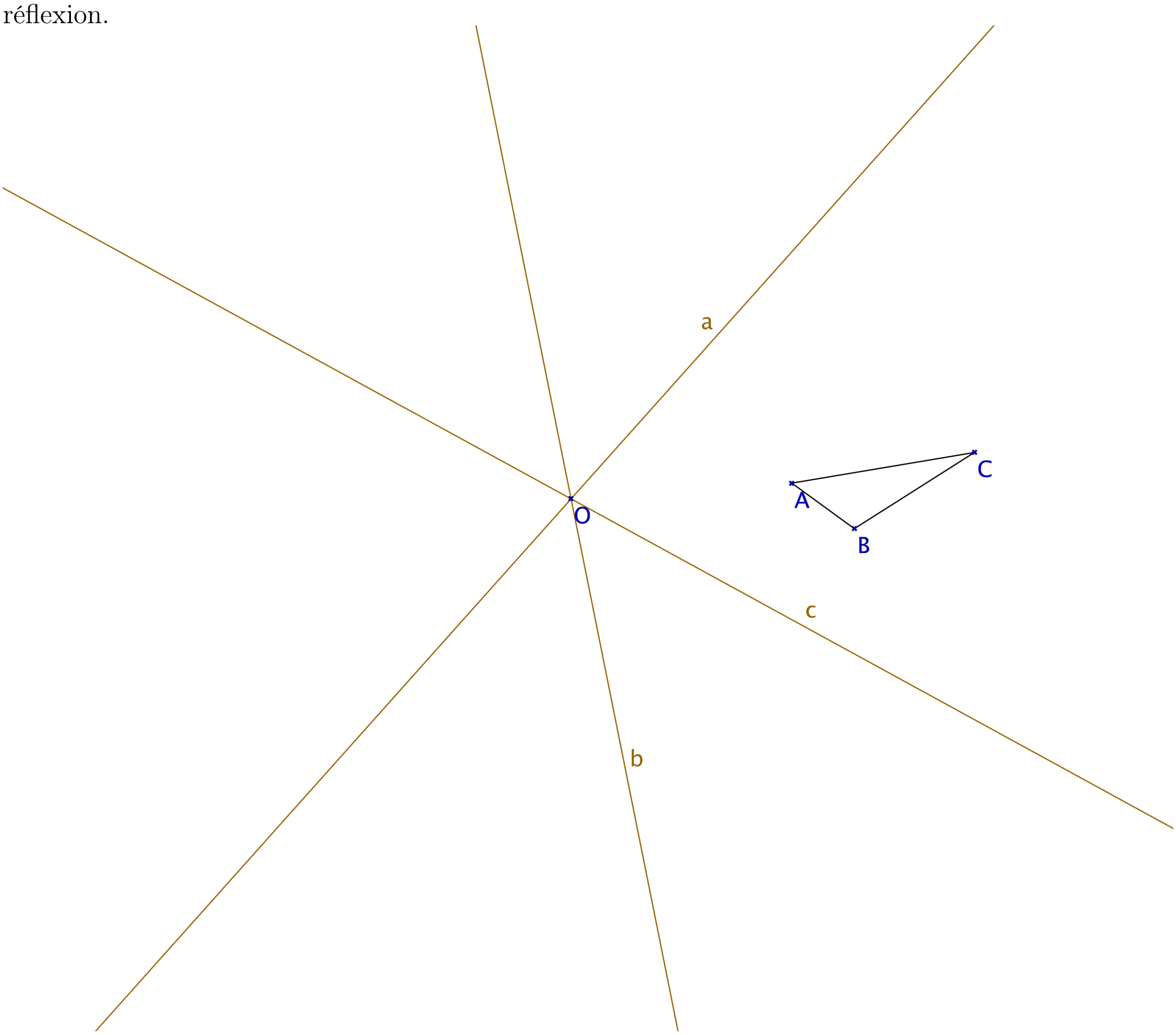
Le quadrilatère $ABCD$ a pour images successives $A'B'C'D'$ et $A''B''C''D''$ dans deux symétries d'axes v et w.

A toi de reconstituer les trois figures et de construire les axes de symétrie.



Exercice 5

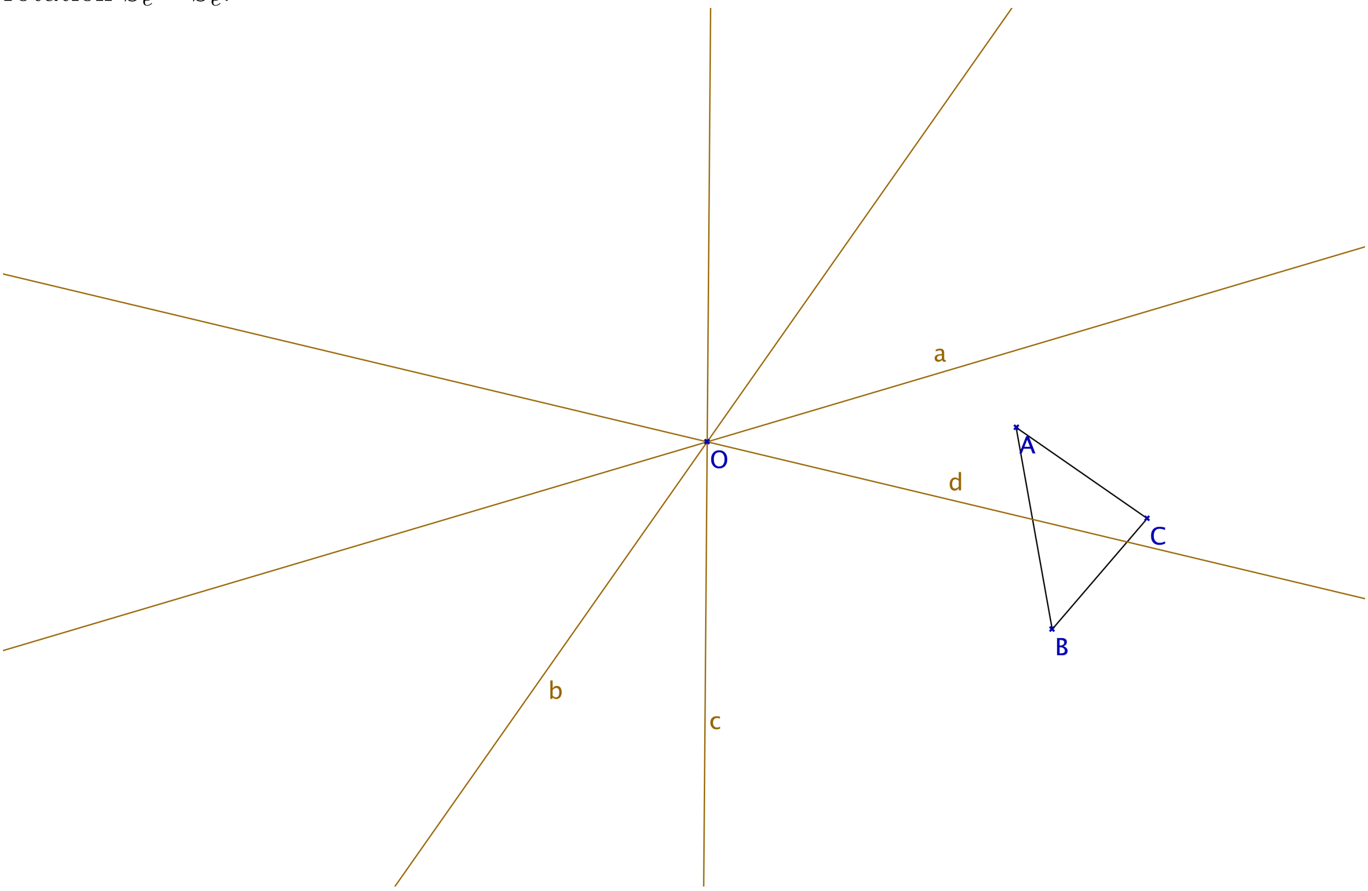
Construis l'image du triangle ABC sous la composée $S_c \circ S_b \circ S_a$. Que constates-tu ? On rappelle que dans cette composition de trois réflexions on effectue d'abord S_a, puis S_b et enfin S_c. Sachant que la figure que tu as obtenue est l'image du triangle ABC sous une réflexion, construis l'axe de cette réflexion.



En fait la composée de trois réflexions d'axes concourants est égale à une réflexion (ça économise pas mal de coups de compas de savoir cela !). On va le prouver. Souviens-toi de la proposition du cours qui dit que la composée de 2 réflexions d'axes concourants en O est une rotation de centre O. Cette proposition nous indique de plus que le premier axe peut être choisi librement parmi les droites passant par O (le deuxième est alors déterminé). Utilise cela pour la composée $S_c \circ S_b$ en faisant un choix astucieux de premier axe, et le fait que la composée d'une réflexion avec elle-même est l'identité, pour montrer que la composée de trois réflexions d'axes concourants est une réflexion.

Exercice 6

On étudie le type d'isométrie qu'on obtient en composant deux rotations de même centre. Dans la figure ci-dessous, on a donné les deux rotations au moyen de leurs axes. $\mathcal{R} = S_b \circ S_a$ et $\mathcal{R}' = S_d \circ S_c$. Construis l'image de $\triangle ABC$ sous $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$. Que constates-tu ? Sachant que la figure que tu as obtenue est l'image du triangle sous une rotation, construis une paire d'axes e et e' telle que $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$ soit la rotation $S_{e'} \circ S_e$.



On va montrer que la composée $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$ de deux rotations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de même centre O est une rotation de centre O.
Pour cela, utilise à nouveau le fait que toute rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes concourants (ou égaux) et que le premier ou le deuxième axe peut-être choisi arbitrairement. Avec un choix judicieux des axes, tu arriveras à la conclusion que $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$ est la composée de deux réflexions et donc une rotation. Montre également que c'est une rotation de centre O.

Exercice 7 (Optionnel)

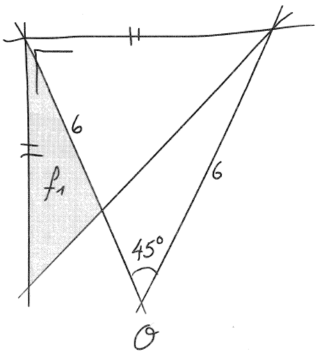
ES82 Et que ça tourne !

a) Construis précisément la figure donnée par le croquis ci-contre (les mesures de longueur sont en centimètres). Commence par placer le point O au centre d'une feuille blanche.

$$f_1 \xrightarrow[\mathcal{R}(O\,;\,-45^\circ)]{} f_2 \xrightarrow[\mathcal{R}(O\,;\,-45^\circ)]{} f_3 \xrightarrow[\mathcal{R}(O\,;\,-45^\circ)]{} \dots$$

Construis les figures f_2, f_3, f_4, ...

Que constates-tu ?



Attention. Les exercices suivants ne seront pas corrigés. Ils sont donnés pour vous permettre de préparer le test. Vérifiez vous-mêmes la justesse des solutions en vous référant au cours.

Exercice 8 (Optionnel)

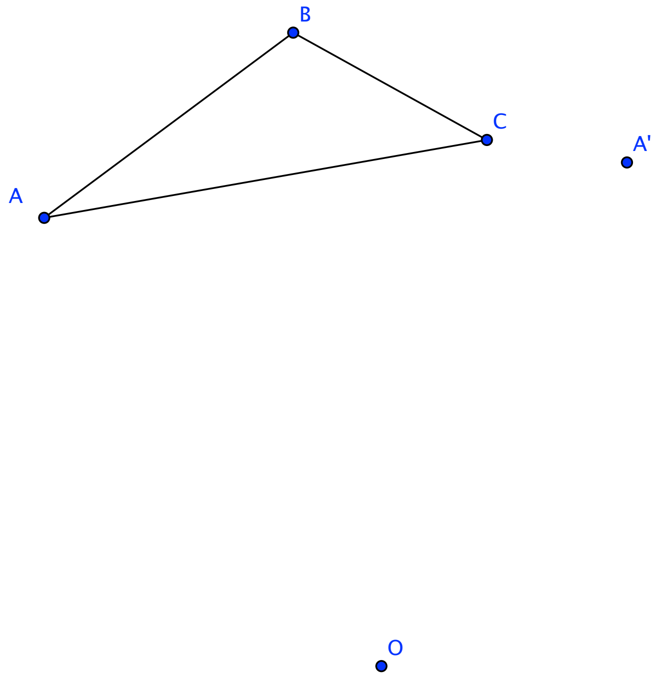
Tiré du test de géométrie en 2013. Sur la figure suivante le point A' est l'image du point A par une rotation $\mathcal{R}$ de centre O.

(1) Construis l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par cette rotation. On ne demande pas de marche-à-suivre, ni de justification, mais une construction visible à la règle, au compas (et au crayon).

(2) Cette rotation est une composition de deux symétries axiales. Construis sur la figure les axes a et b de ces symétries axiales de sorte que $\mathcal{R} = S_b \circ S_a$. Explique quels axes tu choisis et pourquoi.

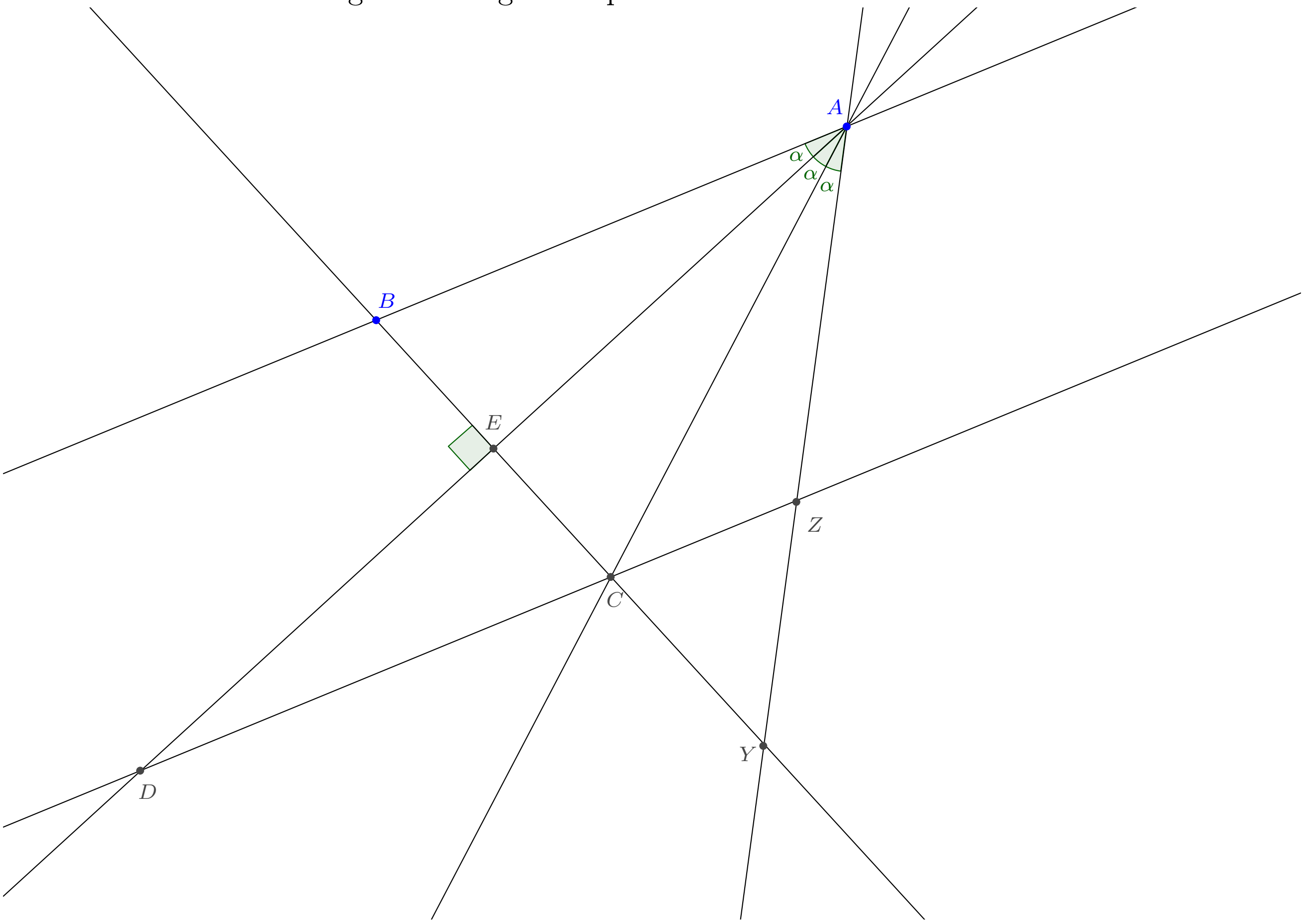
(3) Il existe une autre isométrie que $\mathcal{R}$ qui transforme A en A' et B en B'. Donne-la comme composée de symétries axiales.

(4) Vrai ou Faux ? La composition de deux symétries axiales est toujours une rotation. Justifie ta réponse !


B
C
A'
A
O

Exercice 9 (Optionnel)

Calcul d'angles. Tiré du test de géométrie en 2018. On considère la figure suivante (qui n'est pas représentée à l'échelle) où les droites AB et CD sont parallèles, les angles α indiqués en A mesurent tous trois 20 degrés et l'angle indiqué en E est droit.



(1) (15 points) Calcule les angles du triangle ΔCYZ. Justifie chaque affirmation.

(2) (10 points) On construit maintenant un point X sur la droite AB de sorte que l'angle $\widehat{CDX}$ mesure 40 degrés. Pourquoi la droite XD est-elle parallèle à la droite AC ? Explique précisément si tu utilises un théorème ou sa réciproque ! Et quelle est la mesure de l'angle $\widehat{CDB}$?

Exercice 10 (Optionnel)

En vrac. Tiré du test de géométrie en 2018. Justifie brièvement tes réponses. Une réponse sans justification ne donnera aucun point !

(1) ☐ Vrai ou ☐ Faux ? L'inverse d'une isométrie est toujours une isométrie.

(2) ☐ Vrai ou ☐ Faux ? La composition de deux rotations est toujours une rotation.

(3) Construis un hexagone régulier et donne la marche-à-suivre. Justifie !

(4) ☐ Vrai ou ☐ Faux ? Les demi-plans et les segments sont des figures convexes.

(5) (5 points) Coche les cases de toutes les réponses possibles (et justifie). Une isométrie qui est obtenue comme composition de sept symétries axiales peut forcément s'écrire comme composition de ☐ 0 ; ☐ 1 ; ☐ 2 ; ☐ 3 ; ☐ 4 symétries axiales.