Cours Euler: Corrigé 14

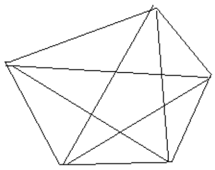
4 décembre 2024

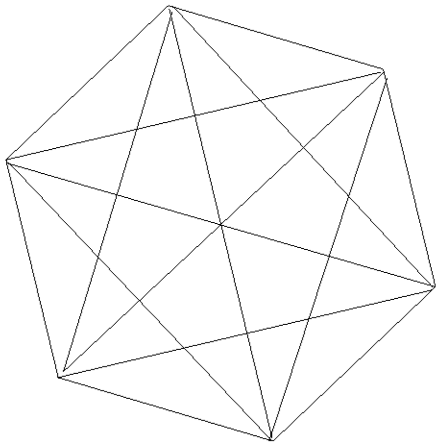
Exercice 1

18. Notons $d(n)$ le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés.

— $n = 3 : d(n) = 0$
— $n = 4 : d(n) = 2$
— $n = 5 : d(n) = 5$
— $n = 6 : d(n) = 9$

Les cas $n = 5$ et $n = 6$





L'idée pour le cas général est tout d'abord d'essayer de trouver intuitivement une formule pour $d(n)$ que nous croyons vraie (sans la prouver !). Dans notre cas on va prendre pour formule :

$$d(n) = (n-3)\frac{n}{2} \tag{1}$$

Même s'il n'est pas demandé de le faire explicitement, on propose une démonstration. Une formule qui dépend d'un entier n est vraie pour tout $n \geq 3$ si elle vérifie deux propriétés :

1. Elle est vraie pour $n = 3$.
2. Si elle est vraie pour $n \geq 3$ quelconque, alors elle est vraie pour $n + 1$.

Ce raisonnement s'appelle un **raisonnement par récurrence**.
On a bien $d(3) = 0$. On suppose maintenant qu'elle est vraie pour un $n \geq 3$ quelconque. Soit P un polygone convexe avec $n+1$ côté . Alors P peut être construit en rajoutant un nouveau sommet à un polygone convexe à n côtés. Donc P a $n-2$ nouvelles diagonales partant de ce sommet, et un "ancien" côté devient une diagonale (faire un dessin pour s'en convaincre). Il y a donc $n-1$ nouvelles diagonales. Le nombre de diagonales $d(n+1)$ de P est donc $d(n+1) = d(n) + n - 1$. En utilisant la formule pour $d(n)$ que nous avons supposé vraie nous

vérifions que

$$d(n+1) = d(n) + n - 1 = (n-3)\frac{n}{2} + n - 1 = \frac{(n-3)n + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2}$$

On factorise ceci de la manière suivante :

$$d(n+1) = \frac{(n-2)(n+1)}{2} = ((n+1) - 3)\frac{n+1}{2}$$

Nous avons donc montré la formule (1) pour $n+1$.

Il ne faut pas s'affoler si cette méthode paraît difficile. C'est normal, en particulier si ce type de preuve est vue pour la première fois !

19. 1. Soient A et B deux points distincts dans le même demi-plan. Par l'axiome c) du demi-plan, le segment $[AB]$ est inclus dans ce demi-plan. Donc un demi-plan est convexe.

2. Soient A et B deux points distincts sur une droite d. Rappelons la définition d'un segment :

Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points A, B et des points P de la droite AB qui sont entre A et B

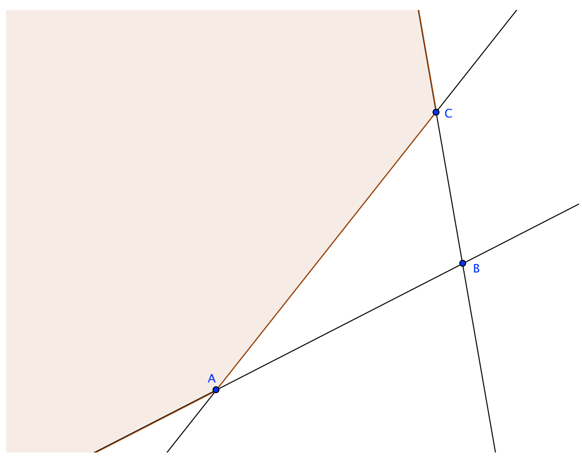
Donc par définition les points du segment $[AB]$ appartiennent à la droite AB. Par unicité la droite AB est la droite d. Donc le segment $[AB]$ est dans d.

3. Soient A et B deux points distincts d'une demi-droite. Par l'axiome c) de la demi-droite, le segment AB est inclus dans cette demi-droite.

4. Soient A et B deux points distincts d'un segment CD. Alors tout point entre A et B est entre les extrémités du segment CD, donc tout point entre A et B est sur le segment CD.

20. Soient A et B deux points dans l'intersection de deux figures convexes F_1 et F_2. Donc ces deux points sont dans F_1 et dans F_2. Comme ces deux figures sont convexes, le segment $[AB]$ est inclus dans F_1 et F_2. Donc le segment $[AB]$ est inclu aussi dans l'intersection de F_1 et F_2.

21. Le point P doit être dans l'intersection des trois figures suivantes :
— le demi-plan délimité par la droite AB qui contient C
— le demi-plan délimité par la droite BC qui contient A
— le demi-plan délimité par la droite AC qui ne contient pas B



22. La région du plan où l'on peut prendre un point P voulu est l'union de 5 régions du plan, chacune associée à un côté du pentagone. Voici comment déterminer la région associée au côté AB :

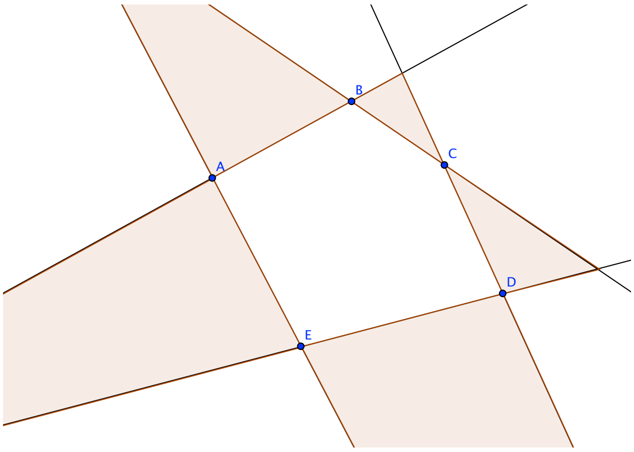
Cette région est l'intersection de trois demi-plans :

— le demi-plan délimité par la droite EA qui contient B

— le demi-plan délimité par la droite BC qui contient A

— le demi-plan délimité par la droite AB qui ne contient pas E

On continue ainsi avec les autres côtés pour obtenir les 5 régions voulues :



Exercice 2

a) Ce polygone est un **octogone régulier**.

b) et c) Comme il est régulier, $\beta = 360 : 8 = 45°$, c'est donc un angle aigu. De plus $\alpha = 180 - \beta = 135°$, c'est un angle obtus.

d) Par un raisonnement analogue, pour le dodécagone, on obtient $\beta = 360 : 12 = 30°$ et $\alpha = 150°$.

e) Pour le polygone régulier à n côtés : $\beta = \frac{360}{n}$ et $\alpha = 180 - \frac{360}{n}$.

Exercice 3

ES45

a) $\widehat{PRQ} = 180° - \widehat{RPQ} - \widehat{PQR} = 180° - 90° - 54° = 36°$

b) $\widehat{CBA} = \widehat{BCA}$ car ABC est isocèle en A.

$\widehat{CBA} = 180° - \widehat{BCA} - \widehat{BAC} = 180° - \widehat{CBA} - 42°$

$\widehat{CBA} = \frac{180^\circ - 42^\circ}{2} = 69°$

c) $\widehat{LMN} = \widehat{MNL} = \widehat{NLM}$

$\widehat{LMN} + \widehat{MNL} + \widehat{NLM} = 180°$

Donc $\widehat{LMN} = 60°$

d) $\widehat{VUT} = 180° - (25° + 40°) = 115°$. Les angles extérieurs du triangles sont supplémentaires aux angles intérieurs associés. Par exemple, l'angle extérieur en U vaut $180° - 115° = 65°$.

ES33

Corrigé

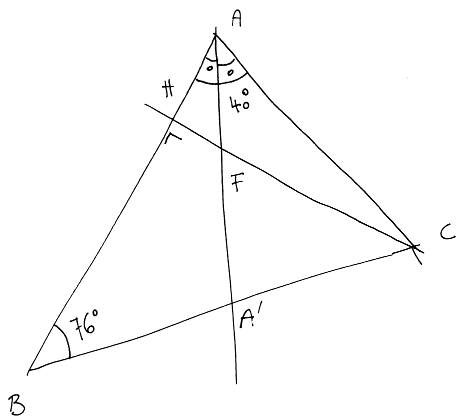
205.

$\widehat{BCH} = 90 - 76 = 14°$

$\widehat{BCA} = 180 - (40 + 76) = 64°$

$\widehat{ACF} = 64 - 14 = 50°$

$\widehat{AFC} = 180 - (50 + 20) = 110°$



Justifications :

Calcul de $\widehat{BCH}$. Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{HBC}+\widehat{BHC}+\widehat{BCH} = 180$. Ainsi, $\widehat{BCH} = 180 - \widehat{HBC} - \widehat{BHC} = 180 - 76 - 90 = 14$.

Calcul de $\widehat{BCA}$. Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{BCA}+\widehat{CAB}+\widehat{ABC} = 180$. Ainsi, $\widehat{BCA} = 180 - \widehat{CAB} - \widehat{ABC} = 180 - 40 - 76 = 64$.

Calcul de $\widehat{ACF}$. Comme $\widehat{BCH}$ et $\widehat{ACF}$ sont adjacents : $\widehat{ACF} = \widehat{BCA} - \widehat{BCH}$.

Calcul de $\widehat{AFC}$. Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $180° = \widehat{AFC}+\widehat{ACF}+\widehat{FAC} = \widehat{AFC} + \widehat{ACF} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Ainsi, $\widehat{AFC} = 180 - \widehat{ACF} - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 180 - 50 - \frac{40}{2} = 110$.

ES35

On commence avec le triangle GHI dont on calcule l'angle en I de 70°. L'angle $\widehat{FIE}$ étant opposé par le sommet, il mesure aussi 70°.
Nous en déduisons la valeurs des supplémentaires $\widehat{GIF} = 110° = \widehat{HIE}$. Une observation attentive des triangles GIF et HIE permet de trouver facilement la valeur des angles $\widehat{GFI} = 60°$ et $\widehat{HEG} = 50°$. Le triangle GEH est isocèle en H puisque les deux autres angles valent 50°. Nous en déduisons que les longueurs des côtés $\overline{HE}$ et $\overline{HG}$ sont égales.
Puisque le triangle FGH est quant à lui équilatéral, nous voyons à notre grande surprise que $\overline{HF} = \overline{HE}$. Autrement dit, le triangle HFE est aussi isocèle ! Ainsi l'angle $\widehat{IFE} = 80°$ et enfin $\widehat{FEI} = 30°$.

Exercice 4

Pour les marches à suivre, une fois qu'on a décrit la marche à suivre d'un certain angle, on la suppose connue pour les suivants.

1. Angle de 90° : Construire la perpendiculaire à la droite d passant par S. On obtient ainsi deux angles droits adjacents de côté commun Sd.
2. Angle de 45° :
   (a) Construire un angle Sad de 90°.
   (b) Construire la bissectrice b de cet angle. On obtient ainsi un angle Sbd de 45°(choisir l'angle aigu).
3. Angle de 60° :

(a) Choisir un point A distinct de S sur la demi-droite Sd.

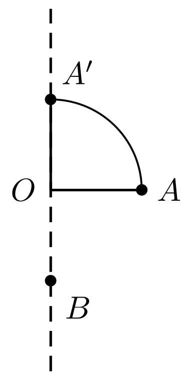
(b) Tracer les cercle $C(S,[SA])$ et $C'(A,[SA])$. Ces cercles se coupent en deux points. En choisir un qu'on nomme B. L'angle $\widehat{ASB}$ est un angle de 60° sur Sd.

4. Angle de 30° : Comme pour l'angle de 45°, diviser un angle de 60° en deux parties isométriques.
5. Angle de 105° : Par exemple
   (a) Construire un angle Sad de 60°.
   (b) Constuire un angle Sab de 45° adjacent à Sad en tant qu'angle-plan.

   L'angle Sdb est un angle de 105° sur Sd.
6. Angle de 75° : Par exemple
   (a) Construire un angle Sad de 60°.
   (b) Construire un angle Sab de 30° adjacent (en tant qu'angle-plan) à Sad.
   (c) Construire la bissectrice c de Sab. L'angle Sdc est un angle de 75° sur Sd (choisir l'angle aigu).

Exercice 5

Voilà un exemple, il y en a beaucoup d'autres ! Soit f la rotation de centre O de 90° qui envoie A sur A' et g la symétrie par rapport à l'axe OA'. Alors l'image de A par f est A', et l'image de A' par g est A'. Donc l'image de A par $g \circ f$ est A', tandis que l'image de A par $f \circ g$ est B. Comme $B \neq A'$, alors $f \circ g \neq g \circ f$.



Exercice 6

1. On prouve la proposition suivante : L'enveloppe convexe de F est l'intersection de toutes les figures convexes qui contiennent F.
   Une généralisation facile du théorème 20 de l'exercice 1 montre que l'intersection d'une famille quelconque de figures convexes est toujours convexe. L'intersection de toutes les figures convexes contenant F est donc convexe. De plus, elle contient F. Montrons d'abord que l'enveloppe convexe est contenue dans l'intersection de toutes les figures convexes qui contiennent F :
   Comme l'enveloppe convexe est la plus petite figure contenant F, alors elle est contenue dans n'importe qu'elle figure convexe contenant F. Donc elle est contenue dans l'intersection de toutes les figures convexes qui contiennent F.
   Montrons maintenant que l'enveloppe convexe contient l'intersection de toutes les figures convexes qui contiennent F :
   L'enveloppe convexe $Env(F)$ est une figure convexe contenant F. Donc, elle va apparaître dans l'intersection de toutes les figures convexe contenant F. Ainsi, $Env(F)$ contient l'intersection de toutes les figures convexes.

2. Comme F est convexe, alors F est (évidemment) une figure convexe qui contient F. Donc l'intersection de toutes les figures convexes contenant F est F.

   L'enveloppe convexe d'un cercle est le disque dont le bord est ce cercle. En effet, soient A et B deux points sur le cercle. Alors le segment $[AB]$ doit être contenue dans l'enveloppe convexe car elle est convexe et elle contient le cercle. Mais le segment $[AB]$ est une corde quelconque. Donc toutes les cordes doivent être dans l'enveloppe convexe. Comme le disque dont le bord est le cercle est la réunion des cordes du cercle, ce disque doit être contenu dans l'enveloppe convexe.

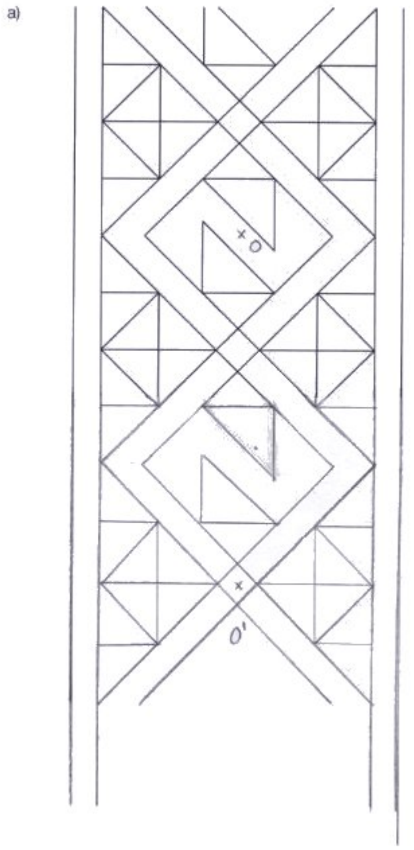
   Réciproquement, montrons que l'enveloppe convexe du cercle est contenue dans ce disque. Rappelons que l'enveloppe convexe du cercle est la *plus petite* figure convexe contenant le cercle. Or, notre disque est convexe et contient le cercle. Donc il doit contenir l'enveloppe convexe.

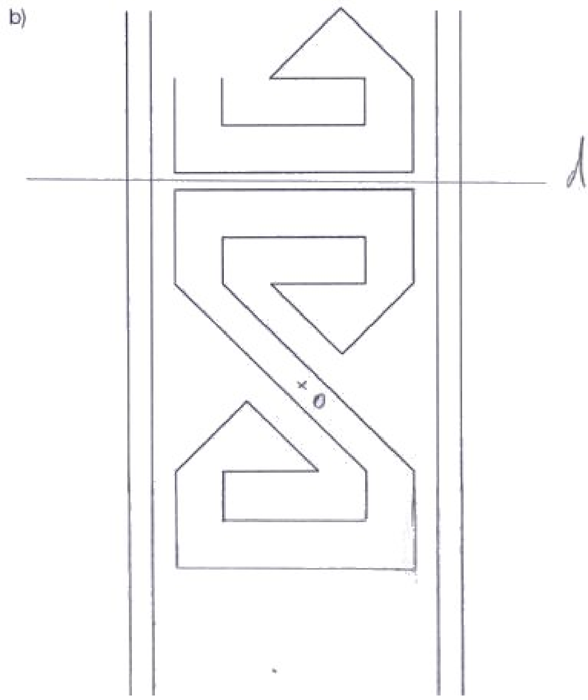
3. La définition de Xavier est équivalente à celle de la donnée pour des figures fermées comme les polygones ou les cercles. Les deux définitions ne sont cependant pas égales dans d'autre cas comme par exemple pour un ensemble fini de points non alignés. Dans ce cas, la version de Xavier pour la définition d'enveloppe convexe donne une figure qui n'est pas convexe. En effet, considérons trois points non alignés A, B, C. La définition donnée par Xavier d'enveloppe convexe de $\{A, B, C\}$ donne le triangle ABC (sans son intérieur). Cette figure n'est clairement pas convexe.

Exercice 7

a) Les points O et O' sont des centres de symétrie.

b) Le point O est un centre de symétrie.
L'axe d est un axe de symétrie.





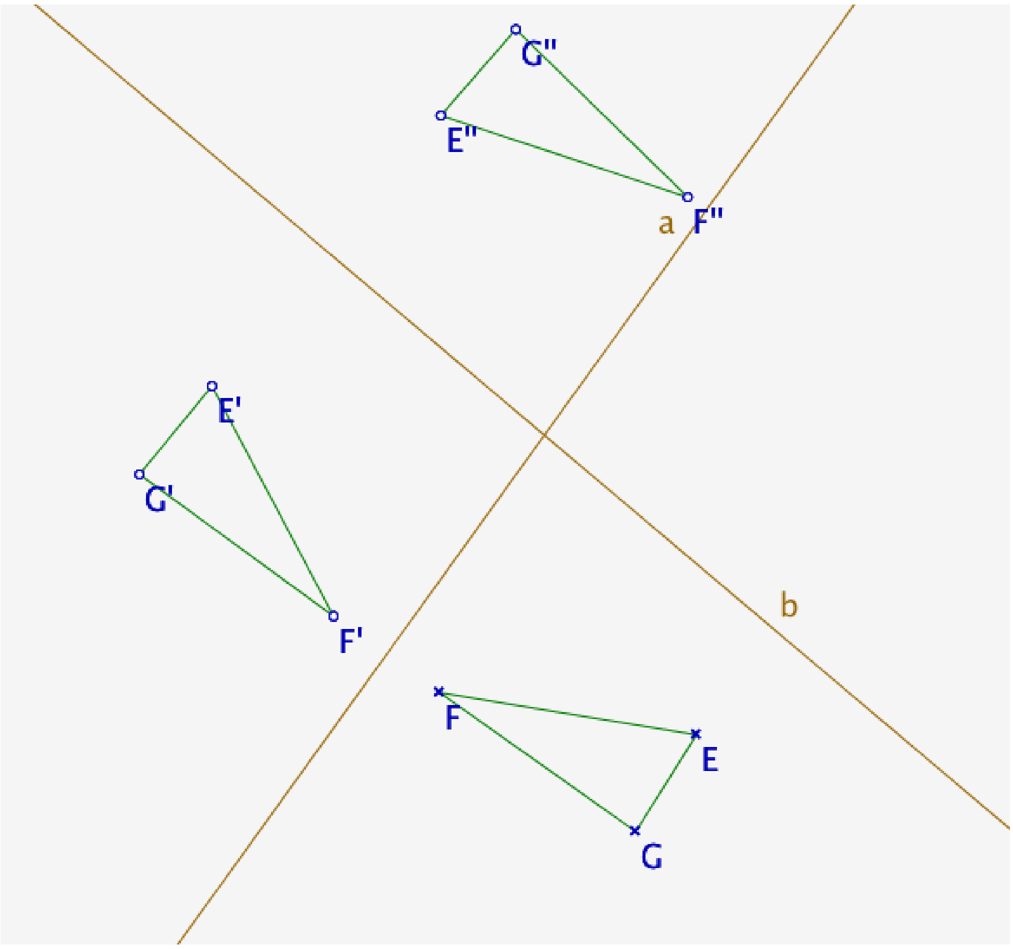
Exercice 8

On travaille avec une isométrie du plan $f : \Pi \to \Pi$, dont on sait qu'elle préserve les distances ; i.e. pour toute paire de points $P, Q \in \Pi$, les distances $\overline{PQ}$ et $\overline{f(P)f(Q)}$ sont égales.
Il faut montrer que f^{-1} aussi préserve les distances. Rappelons que la définition de l'inverse de f est la suivante. Pour tout point X du plan, il existe un unique point $Y \in \Pi$ tel que $f(Y) = X$. On pose alors $f^{-1}(X) = Y$.
Soient X et V deux points du plan. Leurs images par l'inverse de f sont $Y = f^{-1}(X)$ et $W = f^{-1}(V)$. Nous remarquons que $f(Y) = X$ et $f(W) = V$ si bien que les distances suivantes sont égales :

$$\overline{f^{-1}(X)f^{-1}(V)} = \overline{YW} = \overline{f(Y)f(W)} = \overline{XV}$$

Nous avons utilisé le fait que f est une isométrie pour la deuxième égalité.

Exercice 9



L'isométrie $S_b \circ S_a$ est une composition de réflexion dont les axes sont concourants, ainsi on aurait pu construire l'image de EFG sous $S_b \circ S_a$ en construisant l'image de EFG sous la rotation correspondant à la composition de ces deux réflexions, c'est-à-dire une rotation d'angle égal à deux fois l'angle formé par les droites concourantes avec pour centre l'intersection des deux droites a et b.