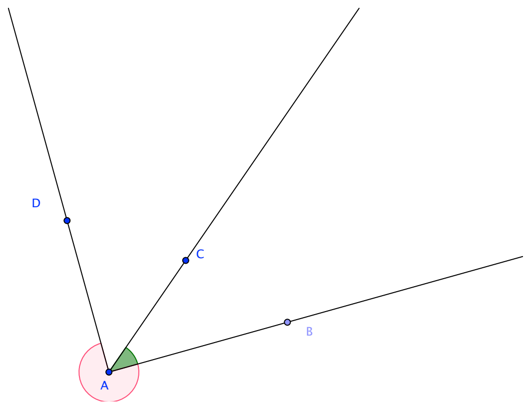
Cours Euler: Corrigé 13

27 novembre 2024

Exercice 1

1) Les angles rectilignes $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$ sont adjacents-complémentaires puisque la demi-droite $[AC$ est commune aux deux angles rectilignes et que l'angle donné par les deux autres demi-droites, à savoir $\widehat{BAD}$, est un angle droit.



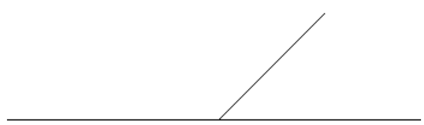
Par contre les angles-plans ne sont pas adjacents-complémentaires car l'angle-plan choisi pour $\widehat{CAD}$ est un angle-plan rentrant comme indiqué sur la figure, alors qu'il devrait être saillant.

2) Considérons un angle-plan saillant Sac et une demi-droite Sb à l'intérieur de cet angle. Alors les angles-plans saillants Sac et Sab en sont pas adjacents en tant qu'angles-plans car ils ne sont pas d'intérieurs disjoints (ils se recouvrent en partie). Par contre, en tant qu'angles rectilignes, ils sont adjacents car ils ont le côté Sa en commun.

3) a) angles supplémentaires
   b) angles supplémentaires
   c) angles complémentaires
   d) angles adjacents-supplémentaires
   e) angles supplémentaires
   f) angles adjacents-complémentaires

Exercice 2

1. Comme l'un des deux doit mesurer trois fois l'autre et la somme doit mesurer 180, un doit mesurer $\frac{1}{4} \cdot 180 = 45$ degrés et l'autre $\frac{3}{4} \cdot 180 = 135$ degrés. On peut donc construire un angle droit, puis sa bissectrice, pour obtenir les angles cherchés.



2. Pour construire un tel angle, il suffit de construire un angle droit, de le diviser en huit parties isométriques grâce à des bissectrices et de prendre trois angles adjacents.

Exercice 3

1) **Méthode 1.** Les deux angles adjacents-supplémentaires d'un angle sont opposés par le sommet et donc isométriques. Deux angles supplémentaires à un même angle sont isométriques à l'un de ces deux angles et donc isométriques entre eux.

   L'argument peut être rendu plus explicite ainsi. Soient maintenant β et γ deux angles supplémentaires à un angle α. Il existe une isométrie f qui envoie β sur un angle β' adjacent-supplémentaire à α et f' qui envoie γ sur un angle γ' adjacent-supplémentaire à α. Or il existe une isométrie g qui envoie β' sur γ' (cela peut éventuellement être l'identité). Et donc on a une isométrie $(f')^{-1}g \circ f$ telle que $(f')^{-1}g(f(\beta)) = \gamma$.

   Méthode 2. Nous utilisons la proposition qui introduit la mesure m d'un angle plan. Soient β_1 et β_2 supplémentaires à un angle α. Par la partie (3) de la proposition, on a

$$m(\beta_1) = 180° - m(\alpha) = m(\beta_2).$$

   Donc, β_1 et β_2 sont isométrique par la partie (2) de la proposition.

2) La somme des angles valant 180°, si un angle vaut plus que 90°(ce qui est la condition pour qu'il soit obtus), il reste moins que 90°pour les deux autres.

Exercice 4

253.
$\widehat{ACB} = 60°$ car c'est un angle supplémentaire à $\widehat{C}$.
$\widehat{BMC} = 60°$ car il est opposé à $\widehat{AMD}$ par le sommet.
$\widehat{AMB} = 120°$ car il est supplémentaire à $\widehat{AMD}$.

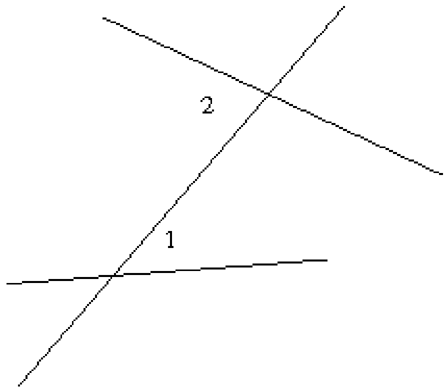
254.
$\widehat{ACB} = 70°$ car ABC est isocèle en A donc les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont isométriques.
$\widehat{AED} = 70°$ car par le théorème de la transversale, $\widehat{AED}$ est isométrique à $\widehat{ACB}$ (correspondants).
$\widehat{DFB} = 70°$ car par le théorème de la transversale, $\widehat{DFB}$ est isométrique à $\widehat{ACB}$ (correspondants).
$\widehat{EDF} = 70°$ car par le théorème de la transversale, $\widehat{EDF}$ est isométrique à $\widehat{DFB}$ (alternes-internes).

255.
$\widehat{B}_4 = 60°$ car il est isométrique à $\widehat{A}_4$ par le théorème de la transversale (correspondants), et $\widehat{A}_4$ est isométrique à $\widehat{A}_2$ car opposé par le sommet à $\widehat{A}_2$.
$\widehat{D}_1 = 75°$ car il est isométrique à $\widehat{C}_1$ par le théorème de la transversale (correspondants), et $\widehat{C}_1$ est isométrique à $\widehat{C}_3$ car opposé par le sommet à $\widehat{C}_3$.
$\widehat{C}_1 = 75°$ justifié ci-dessus.
$\widehat{D}_4 = 105°$ car supplémentaire à $\widehat{D}_1$.

256.
$\widehat{EFD} = 65°$ car par le théorème de la transversale, $\widehat{EFD}$ est isométrique à $\widehat{BCF}$ (correspondants).
$\widehat{ABD} = 30°$ car par le théorème de la transversale, $\widehat{ABD}$ est isométrique à $\widehat{BDC}$ (alternes-internes).
$\widehat{FGB} = 95°$ car c'est un angle opposé par le sommet à $\widehat{EGD}$.
$\widehat{DGF} = 85°$ car c'est un angle supplémentaire à $\widehat{EGD}$.

257.

1. Le premier est faux. Les angles 1 et 2 ici ne sont pas de même amplitude sur la figure ci-après parce que les droites coupées transversalement ne sont pas parallèles :



2. Le deuxième est vrai par le théorème de la transversale.

Exercice 5

On peut procéder par tâtonnement, mais la méthode la plus efficace consiste à poser une équation. La mesure du supplément de α vaut $180° - \alpha$. La mesure du complément de α vaut $90° - \alpha$. L'énoncé s'écrit donc :

$$180° - \alpha = 4 \cdot (90° - \alpha).$$

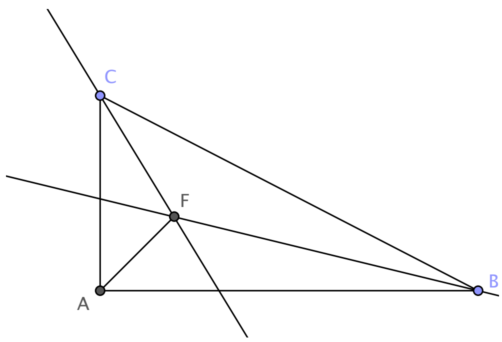
Pour résoudre cette équation, on passe par les étapes suivantes :

$$\begin{aligned} 180° - \alpha &= 4 \cdot (90° - \alpha) \\ 180° - \alpha &= 360° - 4 \cdot \alpha \\ 180° + 3 \cdot \alpha &= 360° \\ 3 \cdot \alpha &= 180° \\ \alpha &= 60° \end{aligned}$$

Dans la première étape, on a distribué le produit sur la parenthèse. Ensuite, à chaque étape, on a effectué les mêmes opérations à gauche et à droite de l'égalité de sorte que l'égalité est préservée.

Exercice 6

ES31 Voici le croquis :



L'angle en A est droit, il vaut $90°$, celui en B est égal à $30°$. Par conséquent l'angle en C vaut $60°$ puisque la somme des angles vaut $180°$. La bissectrice issue de A partage l'angle en deux angles égaix de $45°$ et celle issue de C partage l'angle de $60°$ en deux angles de $30°$. On conclut alors que l'angle en F du triangle AFC vaut $180° - 45° - 30° = 105°$.

ES34

Corrigé

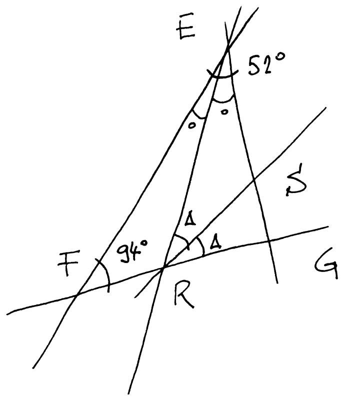
207.

$\widehat{FGE} = 180 - (94 + 52) = 34°$

$\widehat{ERS} = \left[180 - \left(\frac{52}{2} + 34\right)\right] \cdot \frac{1}{2} = 60°$

$\widehat{ESR} = 180 - \left(\frac{52}{2} + 60\right) = 94°$

$\widehat{RSG} = 180 - 94 = 86°$



Justifications :

Calcul de $\widehat{FGE}$. Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{FGE}+\widehat{GEF}+\widehat{EFG} = 180°$. Ainsi, $\widehat{FGE} = 180° - 52° - 94° = 34°$.

Calcul de $\widehat{ERS}$. Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{ERG}+\widehat{RGE}+\widehat{GER} = 180°$. En utilisant que $\widehat{GRS}$ et $\widehat{SRE}$ sont adjacents et de même mesure, on obtient

$$\widehat{ERS} = \frac{1}{2}\widehat{ERG} = \frac{1}{2}\cdot(180° - \widehat{RGE} - \widehat{GER}) = \frac{1}{2}\cdot(180° - \widehat{FGE} - \widehat{GER}) = \frac{1}{2}\cdot(180° - 34° - \frac{52°}{2}) = 60°$$

Calcul de $\widehat{ESR}$. Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{ESR}+\widehat{ERS}+\widehat{RES} = 180°$. En utilisant que $\widehat{RES}$ et $\widehat{FER}$ sont adjacents et de même mesure, on obtient $\widehat{ESR} = 180° - 60° - \frac{1}{2}\cdot 52° = 94°$.

Calcul de $\widehat{RSG}$. Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{RSG}+\widehat{SGR}+\widehat{GRS} = 180°$. En utilisant que $\widehat{GRS} = \widehat{SRE} = 60°$, on obtient $\widehat{RSG} = 180° - 34° - 60° = 86°$.

ES 32

Puisque l'angle en B mesure 156° et que le triangle est isocèle, les angle en A et en C de ce triangle valent tous deux 12°.

Puisque les points A, B, D sont alignés, nous en déduisons que l'angle $\widehat{CBD}$ est supplémentaire de 156°, il vaut donc 24°. C'est aussi la mesure de l'angle $\widehat{CDB}$ (triangle isocèle). La somme des angles du triangle BCD valant 180°, l'angle en C vaut 132°.

Nous arrivons enfin à en déduire la valeur des angles du triangle CDE. En effet les points A, C, E sont alignés si bien que la somme des angles $\widehat{ACB}+\widehat{BCD}+\widehat{DCE}$ est un angle plat. Par conséquent $\widehat{DCE} = 36°$. C'est aussi la mesure de l'angle $\widehat{CED}$. Ainsi $\widehat{CDE} = 108°$.

ES46

Le premier est impossible à construire car $4+11 < 16$, les mesures des côtés ne satisfont pas l'inégalité triangulaire. La somme des angles du second vaut 190°, ce qui est impossible puisque la somme des angles de tout triangle est égale à 180°. Le troisième donne un triangle dégénéré puisque la somme $5 + 4 = 9$, ce n'est pas un triangle. Seul le dernier est possible : $|3 - 5| < 4 < 3 + 5$.

ES 53 Par le Théorème qui affirme que la somme des angles d'un triangle vaut 180°, on calcule l'angle en B qui vaut 41°, l'angle en F de 44°, les angles égaux en G et H de 54,5°, les angles de 60° du triangle équilatéral. La seule nouveauté ici est le dernier triangle. L'angle en O vaut $360° - 333° = 27°$ et de même l'angle en N vaut 36°. Ainsi l'angle cherché en M vaut $180° - 27° - 36° = 117°$.

Exercice 7

Polygone	**Sommets**	**Simple ?**	**Si pas simple, pourquoi ?**	**Convexe ?**
$ABCDEF$	6	oui	/	oui
$GHIJKLM$	7	non	$[ML] \cap [HI]$ appartient à deux côtés	non
$NOPQRS$	6	oui	/	non
$TUVWZ$	5	non	U est un sommet et appartient à plus deux côtés	non
$A_1B_1C_1D_1$	4	non	$[A_1D_1] \cap [B_1C_1]$ appartient à deux côtés	non

Pour la quatrième partie, on mesure les quatre angles du quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$, et on trouve que la somme de ces angles est inférieure à 360°.
On peut généraliser le théorème sur la somme des angles d'un polygone convexe au cas d'un polygone simple. Ainsi, la somme des angles d'un quadrilatère simple vaut $(4 - 2) \cdot 180° = 360°$.
Expliquons pourquoi, pour un quadrilatère ayant deux côtés qui se coupent, comme c'est de la cas de $A_1B_1C_1D_1$, la somme de ses angles est inférieure à 360°. Remarquons qu'un quadrilatère ne peut avoir au maximum que deux côtés qui se coupent. Alors il peut être considéré comme l'union de deux figures, qui sont en fait deux triangles. La somme des angles d'un triangle étant de 180°, on trouve bien que la somme des angles des sommets du quadrilatère est inférieure à $2 \cdot 180°$, vu que les angles formés par le point d'intersection des deux côtés ne sont pas des angles du quadrilatère.