Cours Euler: Corrigé 12

20 novembre 2024

Exercice 1

Aucun, ils sont isométriques ! En effet, on obtient l'isométrie en appliquant deux fois le Théorème de la transversale. Pour cela il suffit de prolonger les quatre demi-droites formant les angles α et β pour former un *parallélogramme*. J'utilise des angles correspondants pour conclure, mais on peut tout-à-fait conclure avec des angles alternes-internes ou -externes. Sur l'illustration l'angle α est correspondant à un angle γ dont les côtés sont d'une part une demi-droite qui contient un côté de α et l'autre est contenu dans un côté de β. Cet angle γ est à son tour correspondant à β. Comme les paires de droites sont parallèlles par hypothèse, le Théorème de la transversale s'applique deux fois et on conclut que α et γ sont isométriques, puis que γ et β le sont aussi. Ainsi $\alpha \cong \beta$.

Exercice 2

Amplitude des angles	**Définition ou propriété utilisée**
$\widehat{A}_1 \equiv \widehat{A}_3 \qquad \widehat{A}_2 \equiv \widehat{A}_4$	Angles opposés par le sommet
$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 \equiv 180° \,;\, \widehat{A}_1 \equiv 180° - \widehat{A}_2$	Angles supplémentaires

Alternes-internes	$\widehat{B}_1$ et $\widehat{A}_3$; $\widehat{B}_2$ et $\widehat{A}_4$	$\widehat{B}_1$ et $\widehat{A}_3$; $\widehat{B}_4$ et $\widehat{A}_2$
Alternes-externes	$\widehat{B}_3$ et $\widehat{A}_1$; $\widehat{B}_4$ et $\widehat{A}_2$	$\widehat{B}_3$ et $\widehat{A}_1$; $\widehat{B}_2$ et $\widehat{A}_4$
Correspondants	$\widehat{B}_1$ et $\widehat{A}_1$; $\widehat{B}_2$ et $\widehat{A}_2$; $\widehat{B}_3$ et $\widehat{A}_3$; $\widehat{B}_4$ et $\widehat{A}_4$	$\widehat{B}_1$ et $\widehat{A}_1$; $\widehat{B}_2$ et $\widehat{A}_2$; $\widehat{B}_3$ et $\widehat{A}_3$; $\widehat{B}_4$ et $\widehat{A}_4$

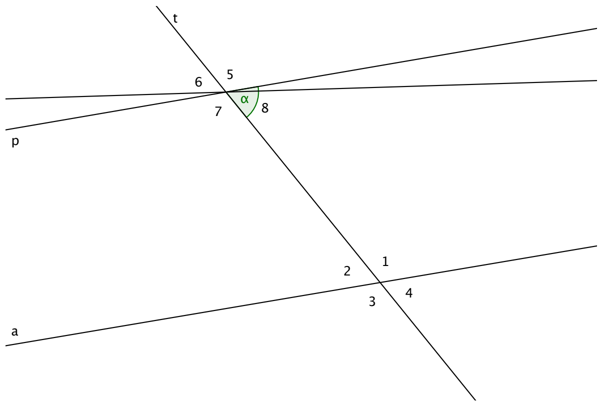
Exercice 3

Réciproque du Théorème de la transversale.
Nous allons avoir besoin du lemme de la donnée, que nous démontrons.

Lemme
Soient Sab et Sac deux angles adjacents et isométriques. Alors ils sont soit symétriques par rapport au côté commun, soit égaux. S'ils sont du même côté du côté commun, ils sont égaux.

Preuve : Il existe une isométrie qui fixe S et envoie un côté de Sab sur un côté de Sac. Si cette isométrie n'envoie pas Sa sur Sa, nous pouvons la post-composer avec la symétrie d'axe la bissectrice de l'angle Sac. Nous avons maintenant une isométrie qui envoie Sa sur Sa et Sb sur Sc. Or si une isométrie f fixe S et est telle que $f(Sa) = Sa$ (le fait qu'elle fixe S en est une conséquence, mais nous n'allons pas le démontrer ; on sait ici de toute façon que f fixe S), elle doit fixer tous les points de Sa et donc tous les points de a. En effet, elle envoie S sur S et Sa sur Sa. Si $P \in Sa$, vu que f préserve les distances et qu'il n'y a qu'un seul point sur Sa à distance $\overline{SP}$ de S, $f(P) = P$. Finalement, elle envoie une droite sur une droite et donc a sur a. Elle fixe tous les points de la droite : nous l'avons déjà montré pour une demi-droite et pour l'autre demi-droite, l'argument est le même. Maintenant, par l'axiome de symétrie, il n'existe que deux isométries qui fixe la droite a, l'identité et la symétrie d'axe a. Or si Sab et Sac sont du même côté du côté Sa, cela ne peut pas être la symétrie d'axe a (à moins que $Sab = Sac$), vu qu'elle enverrai Sab de l'autre côté de Sa, et donc c'est l'identité. Donc dans tous les cas on a $Sab = Sac$. $\square$

On considère deux droites a et b et une transversale t. t coupe b en un point B. On suppose que les deux angles alternes-internes 2 et 8 sont isométriques (voir figure ci-dessous). Traçons la parallèle p à a passant par le point B. Le Théorème de la transversale implique que l'angle 2 et l'angle alterne-interne correspondant entre les droites t et p sont isométriques. Appelons α cet angle.



On en déduit que les angles 8 et α sont isométriques (il existe une isométrie qui emmène 8 sur 2, puis une autre qui envoie 2 sur α ; la composition de ces deux isométries emmène 8 sur α). Or les deux angles 8 et α ont un côté commun sur la droite t et la deuxième demi-droite qui définit chacun des deux angles se trouve du même côté de t. Par le lemme, les angles 8 et α sont égaux si bien que les droites p et b sont confondues.

Exercice 4

1) Elle lui conseille de traverser perpendiculairement à la route, car c'est le trajet le plus court pour passer d'un côté de la route à l'autre et donc qui minimise le temps passé sur la route.

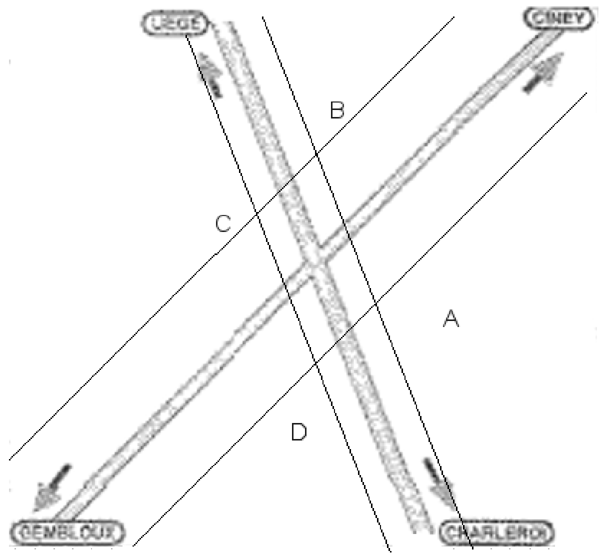
2) On trace 2 droites d_1 et d_2 : la première parallèle à la route Liège-Charleroi et située à 2 cm de cette route, l'autre aussi mais de l'autre côté de la route.

   On trace encore 2 droites d_3 et d_4 : la première parallèle à la route Gembloux-Ciney et située à 1 cm de cette route, l'autre aussi mais de l'autre côté de la route.

   Xavier habite à l'un des points suivants :

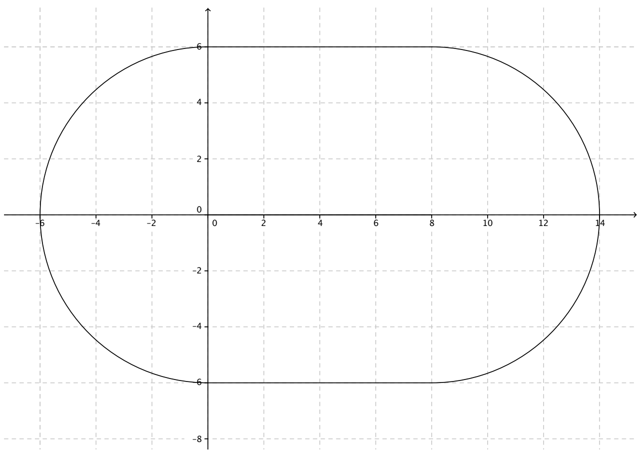
   1. l'intersection de d_1 et d_4
   2. l'intersection de d_2 et d_4
   3. l'intersection de d_1 et d_3
   4. l'intersection de d_2 et d_4

   Les points où Xavier peut habiter sont les points indiqués sur le dessin suivant par A, B, C et D :



Exercice 5

On représente la tige métallique de $8m$ par un segment $[AB]$, placé sur l'axe horizontal sur le schéma. La surface que Marguerite peut brouter est l'ensemble des points à $6m$ de $[AB]$. On commence par construire l'ensemble des points à une distance $d = 6m$ de la droite AB, ce sont les droites EF et GH. Puis on construit l'ensemble des points à $r = 6m$ des points A et B, qui sont les disques (« cercles pleins ») de centres A et B et de rayon r. Alors la surface cherchée est l'intersection de la « bande rectangulaire » délimitée par EF, GH et leurs perpendiculaires passant par A et B respectivement, construite dans la première étape, avec les deux disques de la seconde étape. La surface que peut brouter Marguerite est l'intérieur de l'ovale sur le schéma ci-dessous.



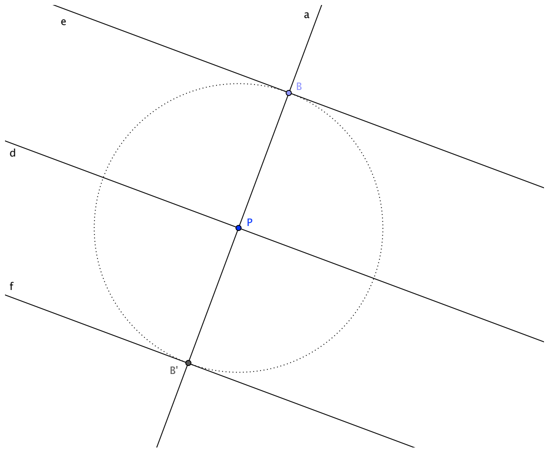
Exercice 6

Un résultat du cours affirme qu'une droite d perpendiculaire à une droite a est aussi perpendiculaire à n'importe quelle parallèle à a.

Exercice 7

« Il existe exactement deux parallèles à une distance $r > 0$ donnée d'une droite d donnée. De plus, ces deux droites sont le lieu géométrique des points du plan qui sont à la distance r de la droite d. »

1) Soit d une droite, et $r > 0$.
Existence : soit $P \in d$ et considérons la perpendiculaire a à d passant par P. On reporte sur la droite a de part et d'autre de P la longueur r, obtenant les points B et B'. Les perpendiculaires à a en B et B', qu'on note e et f, sont parallèles à d par un résultat du cours, et à distance r de d par un autre résultat du cours.



2) Unicité : Soit p une parallèle à d à distance $r > 0$ de d. Soient P et a comme ci-dessus. a coupant d, elle coupe aussi p par un résultat du cours. Soit C leur point d'intersection. Comme $a \perp d$, $d(C, d) = \overline{CP} = r$ par hypothèse. Or il y a exactement deux points sur a à distance r de P, B et B'. Donc $C = B$ ou $C = B'$. Mais il existe une unique parallèle à d passant par l'un de ces points et donc $p = e$ ou $p = f$.

3) Soit S un point du plan à distance r de d. Alors la parallèle p à d passant par S est à distance r de d et donc est égale à l'une des deux parallèles ayant cette propriété. Ainsi, p appartient à l'une de ces parallèles.

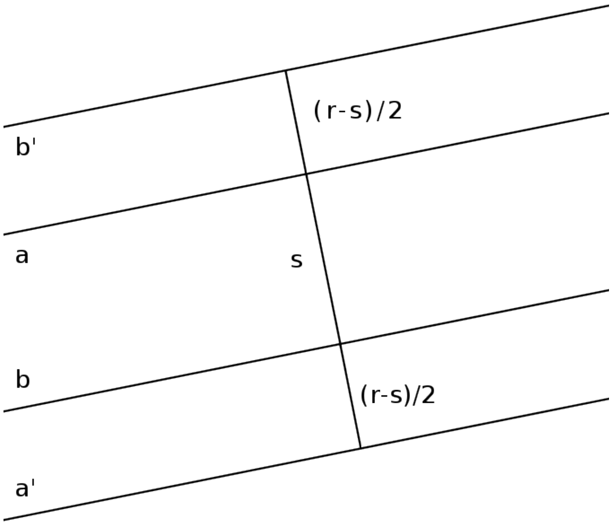
Exercice 8

Dans le cas où a et b sont à distance plus grande que r, alors il n'y a aucun point dont la somme des distances à a et b égale r.

Dans le cas où a et b sont à distance égale à r, alors le lieu géométrique des points dont la somme des distances à a et b égale r est le lieu géométrique des points entre a et b (a et b comprises).

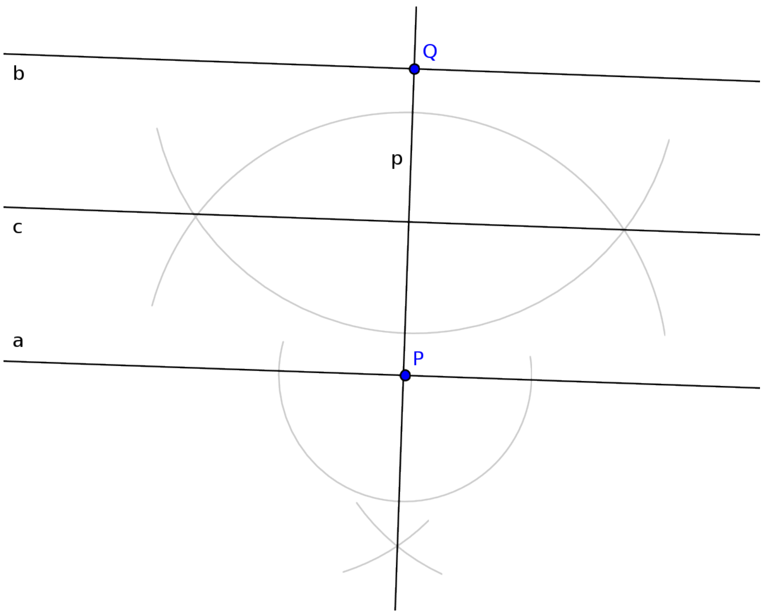
Traitons le cas où a et b sont à une distance s inférieure à r. Les points auxquels nous sommes intéréssés ne sont forcement pas entre a et b par le cas d'avant. Soit P un point qui n'est pas entre a et b et ni sur a ni sur b, mais du même côté que b par rapport à a. Notons t sa distance à b. Alors sa distance à a est $t + s$. Donc sa somme des distances à a et b est $t + (t + s) = 2 \cdot t + s$. Si la somme des distances à a et b de P égale r, alors $2 \cdot t + s = r$. Donc $t = \frac{r-s}{2}$.
Ainsi le lieu géométrique des points dont la somme des distance à a à b égale r consiste en deux droites a' et b' :

— pas entre a et b,
— a' parallèle à a du même côté de b à distance $\frac{r-s}{2}$ de b,
— b' parallèle à b du même côté de a à distance $\frac{r-s}{2}$ de a.



Exercice 9

La droite c est à équidistance des parallèles a et b.



Marche à suivre.

1. Construire une perpendiculaire p à a. Elle coupe a en P et b en Q respectivement.
2. Construire la médiatrice du segment $[PQ]$. C'est la droite cherchée.

Justification. Montrons que c est une parallèle équidistante de a et b. Soit M le milieu du segment $[PQ]$. Notons d'abord par la méthode 1 de la construction d'une parallèle passant par un point que c est parallèle à a, comme la médiatrice du segment $[PQ]$ est perpendiculaire à p. Par définition, la distance de a et c est la distance de M à a. Cette distance égale $\overline{MP}$ comme P est l'intersection de la perpendiculaire p et a. Par un corollaire du cours, la droite p est aussi perpendiculaire à la parallèle b de a. Comme précédemment, on déduit que c est parallèle à b et que la distance de b et c égale $\overline{MQ}$. Or, $\overline{MQ} = \overline{MP}$ car M est le milieu du segment $[PQ]$.

Exercice 10 (Optionnel)

Pour terminer : l'ellipse !

Les élèves doivent trouver les points satisfaisant à la caractéristique « être à la même distance de Vostok (V) et du Cercle Polaire Antarctique (c) ».

Pour jouir de cette particularité, un point A (fig. 1) doit être à l'intersection de la médiatrice m du segment VC et du rayon OC, O désignant le pôle Sud.

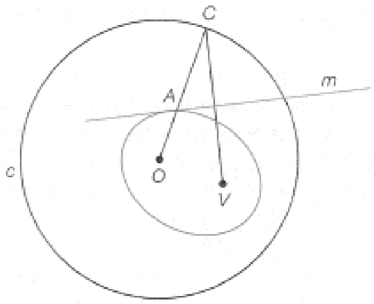


Figure 1

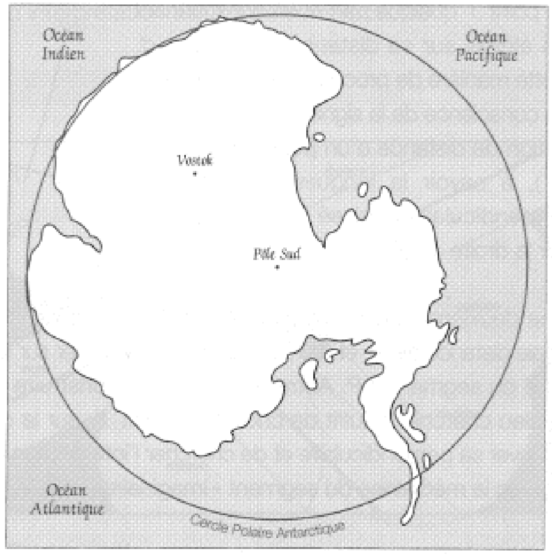
La recherche d'un nombre suffisant de ces points amène au constat selon lequel l'explorateur se situe sur une courbe fermée.

Remarque
Sur une carte terrestre, la longueur des segments projetés n'est jamais proportionnelle à celle des arcs de cercle correspondants. Ce problème n'a donc de sens que si l'on ne tient pas compte de la courbure de la terre.

⇢ Prolongements
Sous la conduite du maître, les élèves cherchent à caractériser cette courbe – c'est une ellipse –, selon l'un des deux scénarios suivants :

Son dernier message radio précise qu'il se trouve à égale distance de Vostok et du Cercle Polaire Antarctique.

Où peut-il bien être ?



- choisir un point de la courbe ;
- mesurer les distances de ce point au pôle Sud et à Vostok ;
- effectuer la somme de ces distances ;
- répéter cette procédure plusieurs fois, afin de constater que les sommes obtenues sont proches ou égales ;
- considérer un point A de la courbe ;
- établir que $AV = AC$ (par construction) ;
- en déduire que :
  $AV + AO = AC + AO = r$
  (r étant le rayon du Cercle Polaire Antarctique).

On est donc bien en présence du lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante, soit par définition : une ellipse. En outre, ce lieu géométrique est aussi celui des centres des cercles tangents intérieurement au Cercle Polaire Antarctique et passant par Vostok.