Cours Euler: Corrigé 11

22 novembre 2023

Exercice 1

Le parallélisme est transitif. Supposons par l'absurde que l'intersection de a et c soit non vide et soit $P \in a \cap c$. Vu que b est parallèle à la fois à a et c, a et c sont des parallèles à b passant par P. Mais par l'axiome des parallèles, il n'existe qu'une seule telle parallèle. Donc $a = c$, ce qui contredit l'hypothèse que a, b, c soient distinctes.

Exercice 2

Soit d' la perpendiculaire à d passant par S. Alors le lieu géométrique des points du plan dont la projection sur d appartient à la demi-droite Sd est le demi-plan Π_1 délimité par d' contenant la demi-droite Sd.

$\pi_1 \subset LG$: Les points de d' sont envoyés sur S, donc sur Sd. Soit P un point dans ${\pi_1}^\circ$ (donc n'appartenant pas à d'). Alors la perpendiculaire p à d issue de P est parallèle à d' (nous avons vu en cours que deux perpendiculaires distinctes à une même droite sont parallèles). Donc cette perpendiculaire est entièrement contenue dans le demi-plan ${\pi_1}^\circ$, sinon par l'axiome des demi-plans, elle couperait d'. Comme $\mathrm{proj}_d(P)$ appartient à cette droite, il est aussi dans ${\pi_1}^\circ$. Et comme $\mathrm{proj}_d(P)$ est aussi sur d, alors $\mathrm{proj}_d(P)$ est sur la demi-droite Sd, vu que $d \cap \pi_1 = Sd$.

$LG \subset \pi$: Inversement, soit P un point de ce lieu géométrique. Si $P \in d'$, alors $P \in \pi_1$. Supposons que $P \notin d'$. Sa projection Q sur d appartient donc à la demi-droite Sd. La perpendiculaire p à d passant par P est parallèle à d' (voir ci-dessus). Donc elle est contenue dans un des demi-plans ouverts définis par d'. Comme Q est sur $Sd \subset \pi_1$ et sur p, la droite p est dans π_1. Comme le point P est dans p, il appartient à π_1.

Exercice 3

Géométrie Constructions

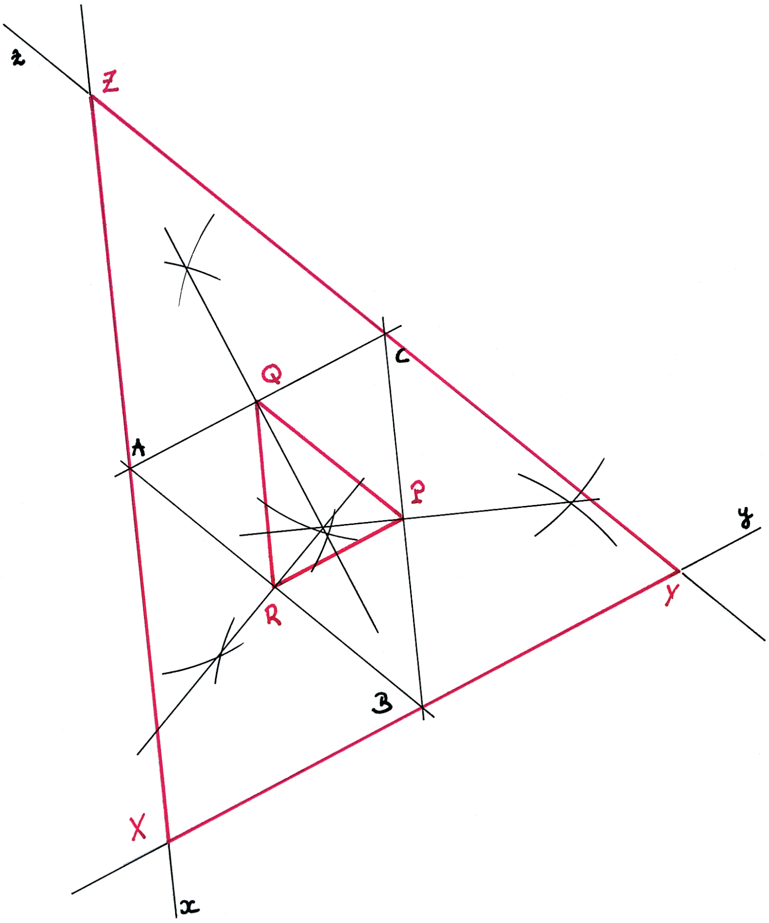
Corrigé

52.

Le triangle *PQR* a une aire 4 fois plus petite que celle du triangle *ABC*.

Le triangle *XYZ* a une aire 4 fois plus grande que le triangle *ABC*.

Les dimensions du triangle *XYZ* sont 4 fois plus grandes que celles du triangle *PQR*.
Son aire est donc 16 fois plus grande que celle de ce même triangle *PQR*.



Exercice 4

1) On peut prendre D le symétrique de A par le milieu du segment $[CB]$, D' le symétrique de B par le milieu du segment $[AC]$ et D'' le symétrique de C par le milieu du segment $[AB]$.

2) On peut tracer le symétrique du segment $[AB]$ par P. P est alors le centre de symétrie de la nouvelle figure. On peut aussi construire le symétrique du point P par le centre de symétrie M où M est le milieu de $[AB]$. M est alors le centre de symétrie.

3) Soit d une droite et O un point sur d. Montrons que O est un centre de symétrie de d, c'est-à-dire que la symétrie S_O transforme d en d.

   $S_O(O) = O$ par définition. Supposons maintenant $P \in d, P \neq O$. Donc $d = OP$. Comme $S_O(P) \in OP$, $S_O(P) \in d$. Vu que $S_O(P) \neq O$ (car $d(S_O(P), O) \neq 0$), $OS_O(P) = d$. Donc la droite d, qui passe par O et P, est envoyée sur la droite passant par O et $S_O(P)$, soit d.

Exercice 5

Symétrie centrale comme composition de deux symétries axiales.

1) L'image de O est O parce que S_a et S_b fixent toutes deux ce point, la première parce que $O \in a$, la seconde parce $O \in b$. On a donc $f(O) = S_b(S_a(O)) = S_b(O) = O$.

   Par contre, si P est différent de O, appelons $P' = S_a(P)$ et $P'' = S_b(P') = f(P)$. Si $P'' = P$, alors $S_b(P') = P'' = P = S_a(P')$. Donc $a = b$ par unicité de la médiatrice de P et P'. Mais cela contredit l'hypothèse que $a \perp b$.

2) L'image de la droite a par S_a est a elle-même et S_b transforme a en elle-même car b est un axe de symétrie de a. Ainsi $f(a) = a$ (mais f transforme un point de a en un point différent en général comme nous venons de le voir). De même $f(b) = b$.

3) Soit P un point n'appartenant ni à a, ni à b. L'angle $\angle POP'$ n'est pas plat, sinon a serait perpendiculaire à OP et donc $OP = b$, ce qui contredit l'hypothèse. Il admet donc un unique axe de symétrie, sa bissectrice. La symétrie S_a envoie $[OP$ sur $[OP'$ est donc est la bissectrice de $\angle POP'$. La croix formée des droites OP et OP' admet deux bissectrices perpendiculaires en O. b doit donc être la deuxième bissectrice. Par conséquent, le point P' doit être envoyé sur la droite OP. Donc $P'' \in OP$. Autrement dit, $f(OP) = OP$.

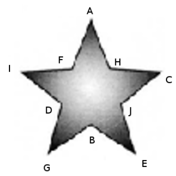
4) De plus $\overline{OP''} = \overline{OP'} = \overline{OP}$. Il n'y a que deux points sur OP à distance $\overline{OP}$ de O, de part et d'autre de O. P est l'un de ces points, Comme $P'' \neq P$, P'' est l'autre. Nous avons bien obtenu l'image de P sous la symétrie centrale S_O.

5) L'image de la droite m est une droite parallèle à OP. En effet si deux droites ne se coupent pas, leurs images par une isométrie ne peuvent se couper (injectivité). Le point Q a pour image par f un point ne se trouvant pas sur m puisque son image se trouve sur OQ, mais de l'autre côté de O. Si ce point était sur m, alors $m = Qf(Q)$ et donc $O \in m$, une contradiction. Donc $m, OP, f(m)$ sont trois droites distinctes et $m \parallel OP \parallel f(m)$. Donc $m \parallel f(m)$.

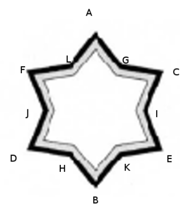
Exercice 6

a)

1. Les axes de symétries sont les droites passant par AB, CD, EF, GH et IJ. Il n'y a pas de centre de symétrie.



2. L'unique axe de symétrie est la bissectrice de l'angle $\widehat{D}$. Il n'y a pas de centre de symétrie.
3. Les axes de symétrie sont les diamètres. Le point O est le seul centre de symétrie.
4. Les axes de symétrie sont les droites AB, CD, EF, GH, IJ et KL. Le milieu du segment $[AB]$ (qui est aussi le milieu des segments $[CD]$, $[EF]$, $[GH]$, $[IJ]$ et $[KL]$) est l'unique centre de symétrie.



5. Les axes de symétrie sont la médiatrice de $[AB]$ et la droite AB. L'unique centre de symétrie est le milieu du segment $[AB]$.

b)

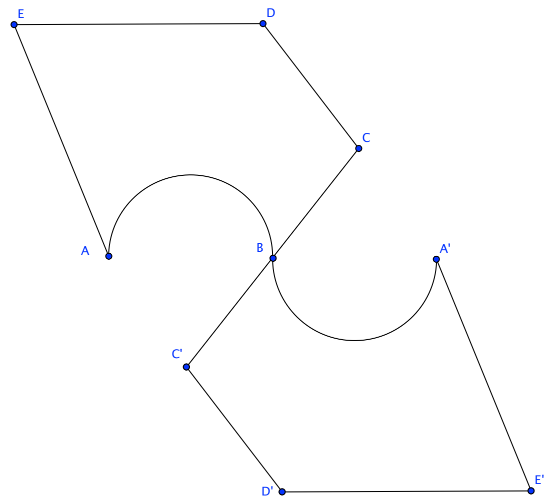
Figures	**Centres de symétrie**		**Axes de symétrie**	
	Nombres	**Position**	**Nombres**	**Position**
droite d	infinité	sur d	infinité	d et droites perp. à d
1/2-droite d'extrémité O	Aucun		1	droite support de la 1/2-droite
plan	infinité	tous	infinité	toutes les droites du plan
1/2-plan délimité par d	Aucun		infinité	perpendiculaires à d

c)

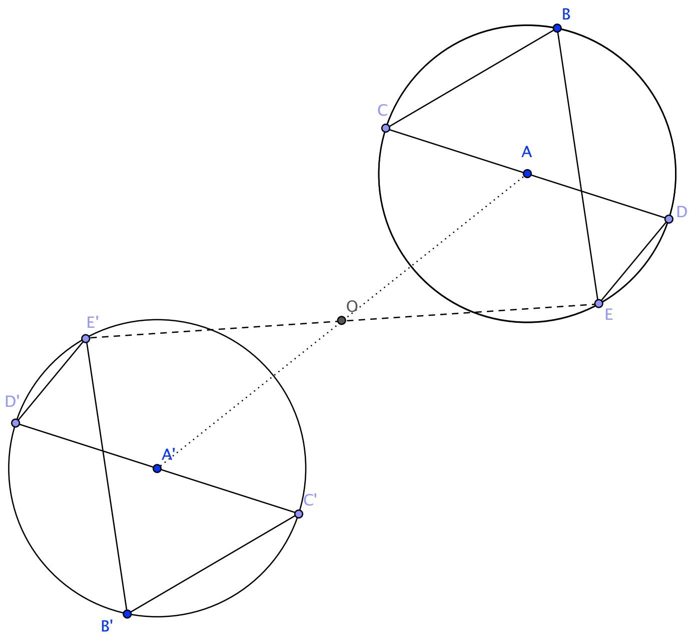
Figures composées	**Nombre de centres de sym.**	**Nombre d'axes de sym.**
cercle et droite extérieure	0	1
cercle et droite sécante au cercle	0 si $O \notin d$, 1 sinon	1 si $O \notin d$, 2 sinon
cercle et droite tangente au cercle	0	1
droite et point extérieur à la droite	0	1
droite et un de ses points	1	2

Exercice 7

1)



2) Sachant que l'image de A est le point A' par une symétrie centrale, nous savons que le centre de symétrie O est forcément le milieu du segment $[AA']$. On commence donc par construire ce point O. Pour construire l'image de la figure $ABCDE$ par S_O, il suffit ensuite de tracer les droites passant par O et reporter les distances. Nous avons indiqué sur la figure le cas $\overline{OE} = \overline{OE'}$.



Exercice 8 (Optionnel)

Un casse-tête de recreomath.qc.ca. Il faut commencer en un croisement pour faciliter la description du trajet, disons sur le bord gauche. Il n'est pas possible de parcourir les 230 mètres, car chaque croisement est constitué d'un nombre impair de routes. Lorsqu'on passe par un croisement, on ne peut donc y revenir sans s'arrêter. Le trajet le plus long commence donc en un croisement, le seul par lequel on pourra repasser, puis s'arrêtera en un croisement par lequel on est déjà passé. Il reste donc deux croisements qu'on n'aura pas pu revisiter sur le chemin, donc deux routes que l'on n'aura pas pu parcourir.

Conclusion. Il faut que ces deux routes soient courtes ! Ce seront donc les deux petits segments de 10m. Amélie peut parcourir 210m, le chemin n'est pas difficile à trouver maintenant que le raisonnement est posé.