Cours Euler: Corrigé 10

15 novembre 2023

Exercice 1

1) Le lieu géométrique des points du plan dont la projection sur d est le point S est la perpendiculaire p à d au point S.

   En effet, soit P un point de ce lieu, c'est-à-dire tel que $\text{proj}_d(P) = S$. Alors la perpendiculaire à d issue de P coupe d en S. Comme cette perpendiculaire est unique, elle doit être égale à p. D'où P appartient à p. Inversement, soit P un point de p. Cette perpendiculaire intersecte d en S et donc S est la projection de P sur d par définition.

2) Il faut tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{C}$. Le point P est alors l'intersection de cette bissectrice avec le segment $[AB]$. En effet la bissectrice est le lieu des points équidistants des demi-droites $[CA$ et $[CB$.

Exercice 2

Nautile cloisonné. Le centre n'est jamais atteint ! Nous démontrons ceci par l'absurde. C'est-à-dire, nous supposons que le centre du cercle est atteint en un nombre fini d'étapes et nous en déduisons une contradiction. Lorsqu'on trouve une contradiction, notre hypothèse de départ doit être fausse. D'où nous aurons prouvé que le centre ne peut pas être atteint en un nombre fini d'étapes.
Supposons donc qu'un des points n est le centre du cercle. Notons $[OY]$ le segment contenant n et $[OX]$ le segment contant le point $n-1$ construit à l'étape précédente (X et Y sont des points consécutifs parmi A, B, C,..., T). Le segment perpendiculaire à $[OY]$ utilisé pour construire n passe par n et $n-1$. Mais comme n est le centre, ce segment doit être contenu dans le rayon $[OX]$. Ceci implique que OX est perpendiculaire à OY. Or, on sait que l'angle entre OX et OY n'est pas de 90 degrés, mais de $\frac{360}{20} = 18$ degrés. D'où une contradiction. Donc le centre du cercle n'est pas atteint en un nombre fini d'étapes.
Remarquons que la seule chose que nous avons utilisé dans la démonstration est le fait que 360 divisé par le nombre de parties dont le cercle a été divisé n'est pas 90 (l'angle est 90 si et seulement si le cercle est divisé en 4 parties). Donc nous obtenons le même phénomène si on divise le cercle en un nombre quelconques de parties supérieur à 4 (si le nombre de parties est plus petit que 4 il n'est pas possible de construire le Nautile).

Exercice 3

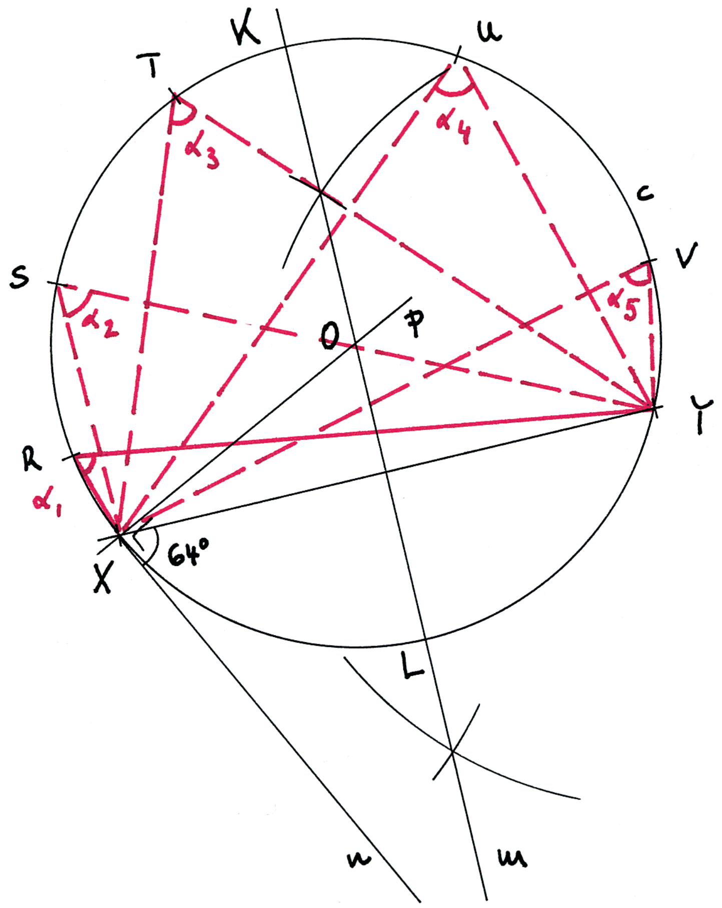
L'arc capable.

Corrigé

79.

Les angles α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 mesurent tous $64°$ ou $116°$, suivant comment sont placées les lettres R, S, T, U et V.

Ce sont des angles inscrits qui ont tous le même angle au centre $\widehat{XOY} = 128°$.



Exercice 4

Marche à suivre.

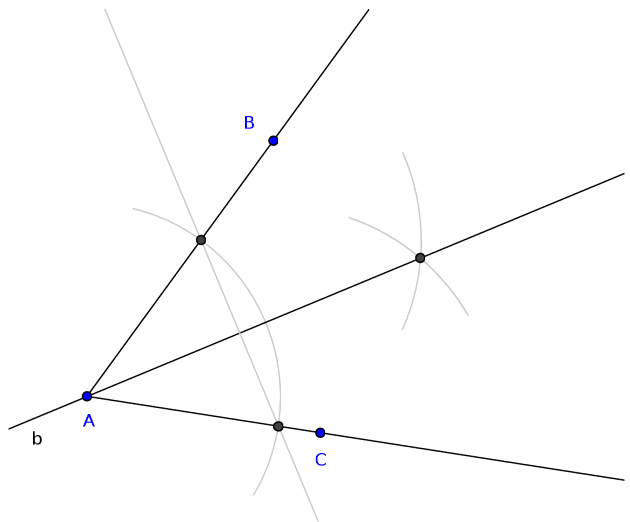
1. On choisit sur les demi-droites de l'angle donné Sab un point $A \in Sa$ et un point B sur Sb.
2. On reporte la distance $\overline{SA}$ sur la demi-droite Tc donnée. Cette construction est garantie par l'axiome de report et $(D7)$; le point ainsi construit est unique. Appelons le C.
3. On trace le cercle de rayon $\overline{SB}$ centré en T et le cercle de rayon $\overline{AB}$ centré en C.
4. Ces cercles se coupent en exactement deux points D et D' par $(D6)$. Les demi-droites $[TD$ et $[TD'$ déterminent avec Tc deux angles rectilignes isométriques à l'angle Sab.

Exercice 5

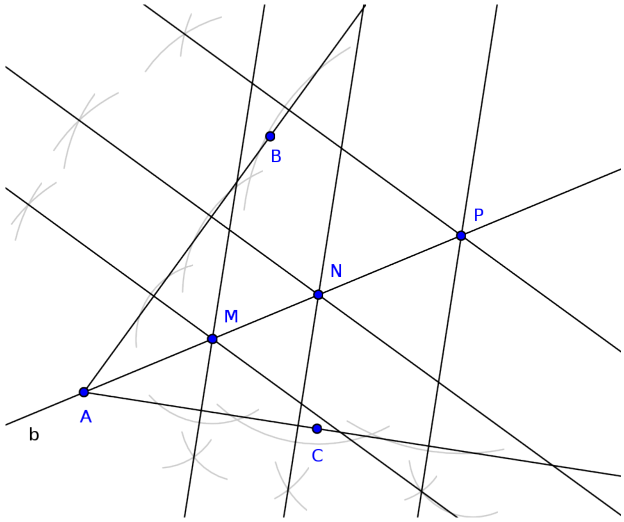
Non	Non	Pas de côté commun !
Oui, le sommet C	Oui, le côté $[CA$	Non
Oui, le sommet A	Oui, le côté $[AB$	Oui
Oui, le sommet A	Non	Pas de côté commun !
Non	Non	Pas de côté commun !
Oui, le sommet A	Oui, le côté $[AC$	Oui

Exercice 6

1. La femme a raison dans le sens que sur le dessin la route $[MB]$ est préférable à la route $[MA]$. Mais personne n'a raison dans le sens que ni $[MA]$ ni $[MB]$ est le chemin le plus court, parce que le chemin le plus court est $[MP]$, où P dénote la projection de M sur la droite AB.
2. Pour que la ruche soit à égale distance des points A et B, il faut qu'elle soit sur la médiatrice du segment $[AB]$. Il faut donc placer la ruche sur le point de cette médiatrice le plus proche de M. Ce point est la projection de M sur la médiatrice du segment $[AB]$. Il n'y a pas d'autre endroit qui donne satisfaction à l'apiculteur.
3. a) On construit la bissectrice b avec la méthode donnée au cours :



b) On choisit trois points M, N et P sur b et construit :



c) $d(M, AB) = d(M, AC)$, $d(N, AB) = d(N, AC)$ et $d(P, AB) = d(P, AC)$.

d) Tous les points de la bissectrice d'un angle sont équidistants des demi-droites qui définissent cet angle.

Exercice 7

a) Une symétrie centrale dont le centre est A ou une symétrie axiale dont l'axe de symétrie est la droite passant par A perpendiculaire à la bissectrice de $\widehat{A}_1$.

b) Les angles rectilignes $\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_2$ sont isométriques.

c) $\widehat{A}_1$ est appliqué sur $\widehat{A}_2$ par une des isométries du point 1).

d) Non, les angles $\widehat{C}_1$ et $\widehat{C}_2$ ne jouissent pas de la même propriété, car le point C n'est pas l'intersection de deux droites.

Exercice 8

1. L'image d'un point sur a est sur a', et l'image d'un point sur b est sur b'. Donc l'image d'un point en même temps sur a et sur b est en même temps sur a' et sur b'.

2. O fait partie du segment $[AB]$. Donc O' fait partie du segment $[A'B']$ par préservation des segments par les isométries. Il suffit donc de montrer que $d(O', A') = d(O', B')$:

$$\begin{aligned} &d(O, A) = d(O, B) && \text{car } O \text{ est le milieu de } [AB] \\ &d(O, A) = d(f(O), f(A)) = d(O', A') \\ &d(O, B) = d(f(O), f(B)) = d(O', B') \end{aligned}$$

Donc on conclut que $d(O', A') = d(O', B')$.

3. O et M sont distincts par hypothèse et on a vu que les isométries transforment des points distincts en des points distincts.

4. b est perpendiculaire à a et donc est un axe de symétrie de a. La symétrie b transforme A en un point de a de l'autre côté de b à même distance de O. Mais il n'y a qu'un seul point sur cette demi-droite Oa qui vérifie cette condition (axiome du report d'une distance sur une demi-droite). C'est donc le point B. Donc b est la médiatrice de $[AB]$ par le théorème de la médiatrice. Donc $d(A, M) = d(B, M)$. Comme f est une isométrie nous avons aussi que

$$d(A', M') = d(f(A), f(M)) = d(A, M) = d(B, M) = d(f(B), f(M)) = d(B', M').$$

5. O' et M' par cette propriété se trouvent sur la médiatrice de $[A'B']$ (car la médiatrice de $[A'B']$ est le lieu géométrique des points équidistants à A' et B'). Mais il ne passe qu'une droite par deux points (axiomes de connexion). Cette médiatrice est donc confondue avec b'.
6. On sait que la médiatrice d'un segment $[AB]$ est perpendiculaire à la droite AB. On a démontré que b' est la médiatrice de $[A'B']$, donc b' est perpendiculaire à $[A'B']'$.

   On a donc montré que les isométries préservent la perpendicularité !

Exercice 9

Un casse-tête pour le plaisir. On observe que lorsque deux iguanes de couleurs différentes se rencontrent, le nombre d'iguanes de ces couleurs diminue d'un, alors que le nombre d'iguanes de la troisième couleur augmente de deux. Ainsi, la *différence* du nombre d'individus de deux populations de deux couleurs différentes reste égale, ou sinon augmente ou diminue de trois.
Par exemple, dans le cas où un iguane rouge rencontre un iguane jaune, il reste 14 iguanes rouges et 16 iguanes jaunes, si bien que la différence reste égale à deux ($16 - 14 = 17 - 15$), mais il y a à présent 15 iguanes jaunes et par conséquent la différence "iguanes rouges - iguanes verts" est passé de 2 à -1, elle a diminué de 3 pendant que la différence "iguanes verts - iguanes jaunes" est passé de -4 à -1, elle a augmenté de 3.
Autrement dit la différence de deux populations d'iguanes soit reste égale, soit reste égale "modulo 3". Or, on demande s'il est possible que deux populations d'iguanes disparaissent, auquel cas la différence de leurs populations sera nulle, égale à zéro. Au départ cette différence vaut 2 ou 4. On ne peut atteindre zéro en ajoutant ou soustrayant 3, la réponse est que c'est impossible.