Cours Euler: Série 10

15 novembre 2023

Exercice 1

1) On donne une droite d et un point S sur d. Quel est le lieu géométrique des points du plan dont la projection sur d est le point S ? Donne une démonstration.

2) Caroline souhaite placer un point P quelque part entre les extrémités du côté $[AB]$ d'un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. Le point P doit se trouver à égale distance des deux autres côtés. Où va-t-elle le placer ?

Exercice 2

Nautile cloisonné. Trace un grand cercle de centre O et partage-le en 5 parties isométriques en traçant 5 rayons séparés par des angles de 72° (tu peux utiliser ton rapporteur).

1) Construis les bissectrices des angles de 72° puis celles de angles de 36° obtenus de sorte à partager ton cercle en 20 parties isométriques. Les points d'intersection des rayons avec le cercle s'appellent $A, B, C, \ldots$ ordonnés dans le sens des aiguilles d'une montre.

2) Construis la perpendiculaire au rayon $[OB$ passant par A. Elle coupe le rayon $[OB$ au point 1.

3) Construis la perpendiculaire au rayon $[OC$ passant par le point 1. Elle coupe le rayon $[OC$ au point 2.

4) Continue ainsi. Combien d'étapes faut-il pour atteindre le centre du cercle ?

Exercice 3

L'arc capable. Effectue la construction décrite par la marche à suivre suivante. Tu utiliseras la règle pour mesurer les distances et la rapporteur pour mesurer les angles.

Trace un segment $[XY]$ de longueur 7,3 cm et construis la médiatrice m de $[XY]$. Trace une demi-droite $[Xn$ qui fait un angle de 64^o avec XY et la perpendiculaire p à n passant par X.

La perpendiculaire p coupe m en un point O. Trace le cercle $(O; \overline{OX})$ centré en O et de rayon $\overline{OX}$. Il coupe m en deux points K et L. Sur l'arc de cercle $\widehat{XKY}$ place cinq points R, S, T, U et V.

Quelles sont les mesures des angles $\widehat{XRY}$, $\widehat{XSY}$, $\widehat{XTY}$, $\widehat{XUY}$ et $\widehat{XVY}$?

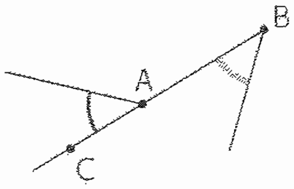
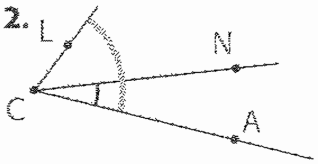
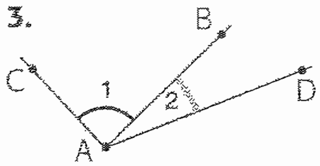
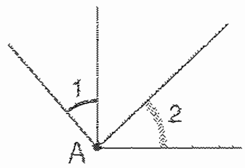
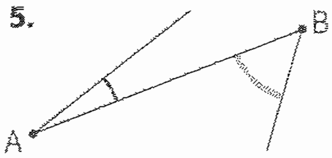
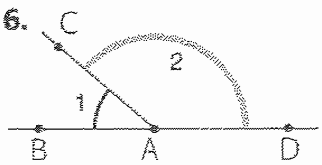
Exercice 4

Nous avons un axiome qui nous permet de reporter un segment donné sur une demi-droite donnée. Comment peut-on utiliser cet axiome pour reporter un angle donné Sab en un angle Tcd si la demi-droite Tc est donnée ? Ecris une marche-à-suivre et démontre que ta marche-à-suivre donne bien le résultat escompté.

Exercice 5

Sur la donnée.

Dans les situations suivantes, complète le tableau :

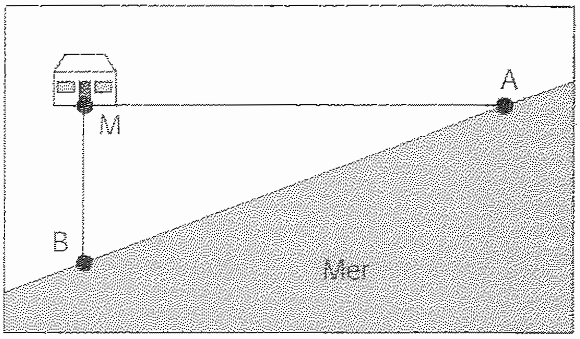
Situations	Les deux angles ont-ils un même sommet ? Si oui, cite-le.	Les deux angles ont-ils un côté commun? Si oui, cite-le.	Les deux angles sont-ils situés de part et d'autre du côté commun ?
1. 			
2. 			
3. 			
4. 			
5. 			
6. 			

Exercice 6

1 Un pêcheur réclame une route qui relierait sa maison à la côte, **par le chemin le plus court**.

L'échevin des Travaux Publics lui propose de construire cette route suivant le tracé MA.

La femme du pêcheur objecte qu'il serait préférable de tracer la route suivant MB.



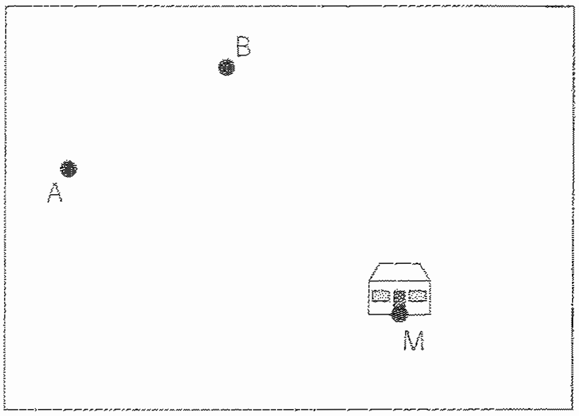
Qui a raison ? ....

Pourquoi ? ....

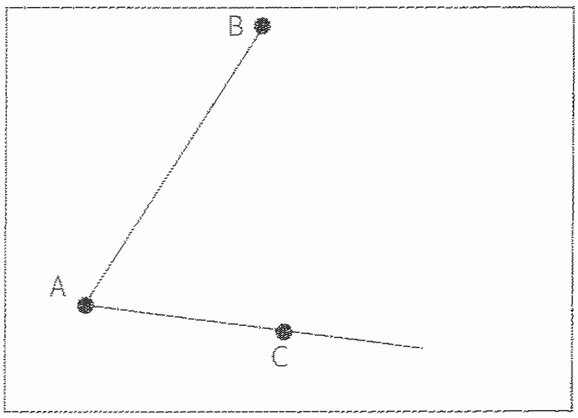
2 Un apiculteur désire placer une ruche à égale distance des massifs floraux A et B, mais le plus près possible de sa maison M.

Aide-le à trouver cet endroit ... avec précision.

Crois-tu qu'il y ait plusieurs endroits qui donnent satisfaction à l'apiculteur ? ....



3 **a)** Construis la **bissectrice** b de l'angle $\widehat{BAC}$.
(voir **Manuel**, page 58)



b) Porte les points M, N et P sur b. De chacun d'eux, abaisse la perpendiculaire à chaque côté de l'angle.

c) Compare les distances :

d(M, AB) .... d(M, AC) ;

d(N, AB) .... d(N, AC) ;

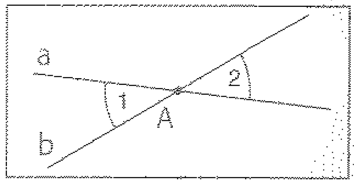
d(P, AB) .... d(P, AC).

d) Quelle propriété des points de la bissectrice d'un angle te suggèrent les résultats du **c)** ?

Exercice 7

Dans cet énoncé, l'angle 1 est noté $\hat{A}_1$ et l'angle 2, $\hat{A}_2$. Sur la donnée.

Les droites a et b se coupent au point A.



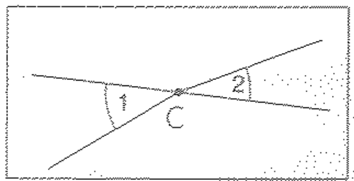
a) Quelle(s) transformation(s) du plan applique(nt) $\widehat{A_1}$ sur $\widehat{A_2}$?

b) Compare les amplitudes de $\widehat{A_1}$ et de $\widehat{A_2}$:

c) Cite une propriété qui justifie ta réponse donnée en **b)**.

d) Les angles $\widehat{C_1}$ et $\widehat{C_2}$ du dessin ci-contre jouissent-ils de la même propriété ?

Pourquoi ?



Exercice 8

On veut démontrer le résultat suivant :

« Les isométries préservent la perpendicularité. »

On propose d'aller pas par pas dans cette démonstration, bien plus longue que n'importe quel exercice théorique qui pourrait être demandé dans le test. C'est un excellent exercice de comprendre la démarche proposée ci-dessous et de réussir à justifier tes affirmations à l'aide des axiomes de la géométrie plane ! Si tu n'arrives pas à montrer une étape, passe à la suivante en considérant l'étape comme prouvée.

Tout d'abord il faut rendre cet énoncé précis. Que signifie-t-il ? Nous avons défini la perpendicularité pour les droites. Considérons donc deux droites a et b perpendiculaire entre elles. L'énoncé parle de n'importe quelle isométrie. Considérons donc une isométrie quelconque $f : \pi \to \pi$. L'énoncé affirme que l'image de la croix perpendiculaire ab est une croix perpendiculaire $a'b'$. On va prouver cela. Je te conseille de t'aider d'un dessin pour faire les preuves.

Considère deux points A et B sur a à égale distance de l'intersection O des droites a et b. Considère un point M sur b distinct de O. L'image de a sous f est une droite a', l'image de b une droite b'. Les images de A et B sont des points A' et B' de a' et l'image de M un point M' de b'.

1) Montre que l'image O' du point O est l'intersection de a' et b'. (Utilise le fait que deux droites ont au plus un point d'intersection.)

2) Montre que O' est le milieu du segment $[A'B']$. (Rappelle-toi la définition d'une isométrie.)

3) Montre que M' est distinct de O'. (Utiliser une propriété des isométrie montrée à la série 9.)

4) Montre que la droite b est la médiatrice du segment $[AB]$. (Utilise le fait qu'elle est perpendiculaire à a, l'axiome du report d'une distance et le théorème de la médiatrice.) Conclus-en que $\overline{AM} = \overline{BM}$ et que $\overline{A'M'} = \overline{B'M'}$.

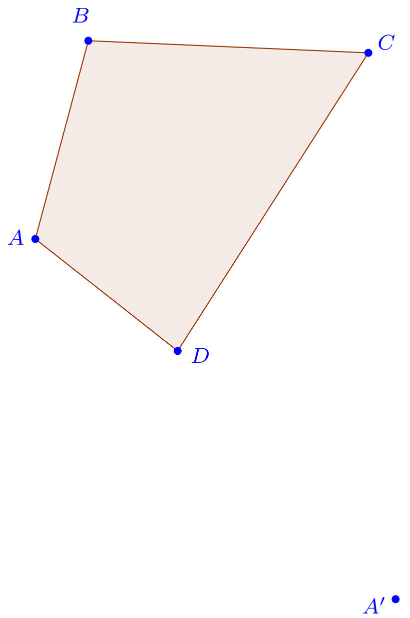
5) Comme O' et M' sont deux points distincts tous deux équidistants à A' et B', conclus que b' est la médiatrice du segment $[A'B']$. (Utilise le théorème de la médiatrice et l'axiome de connexion qui dit que par deux points passe exactement une droite.)

6) Utilise le fait que la médiatrice d'un segment $[AB]$ est perpendiculaire à la droite AB pour terminer.

Exercice 9 (Optionnel)

Test 2016 : Construction. (20 points)

1) Une symétrie axiale transforme le quadrilatère $ABCD$ en un quadrilatère $A'B'C'D'$ dont on donne le point A'. Construis l'axe de symétrie et l'image du quadrilatère. On ne demande pas de marche à suivre ici, mais une construction visible à la règle et au compas. N'efface pas les traits de construction.



2) Quelle est la position relative des droites AA' et BB' ? Donne une réponse et une justification liée à la construction précédente !

Exercice 10 (Optionnel)

Test 2016 : La bissectrice. (20 points) On donne un angle rectiligne Sab qui n'est pas plat.

1) Quelle est la *définition* de la bissectrice de l'angle rectiligne Sab ?

2) Exprime la bissectrice sous forme de *lieu géométrique*, c'est-à-dire donne une propriété géométrique qui distingue tous les points de la bissectrice de l'angle rectiligne considéré.

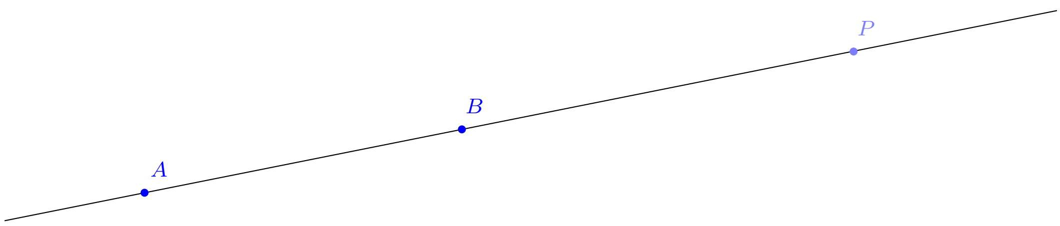
3) Donne la marche à suivre et construis la bissectrice d'un angle saillant Sab donné. On suppose que la construction de la médiatrice est connue.

Exercice 11 (Optionnel)

Test 2016 : Théorie, la symétrie axiale. (20 points)

1) L'axiome de symétrie dit qu'il existe des isométries qui fixent une droite d donnée (point par point). Combien en existe-t-il et comment s'appellent-elles ? Explique comment chacune d'elles transforme le plan.

2) Soit A, B et P trois points alignés comme sur la figure ci-dessous. Démontre que si T est une isométrie du plan qui fixe A et B, c'est-à-dire $T(A) = A$ et $T(B) = B$, alors T fixe aussi le point P. Explique quels axiomes tu utilises pour justifier ton raisonnement.



3) Soit T une isométrie du plan qui fixe trois points non alignés A, B et C. En t'appuyant sur les parties (1) et (2), démontre que T est l'identité.

Exercice 12 (Optionnel)

Test 2016 : Vrai ou faux ? (20 points) Justifie brièvement tes réponses. Une réponse sans justification ne donnera aucun point.

1) Il existe une géométrie qui satisfait les axiomes de connexion ayant exactement sept points (un dessin suffit pour justifier).

2) Il existe un triangle dont les côtés mesurent 4, 12 et 7 centimètres.

3) Dans une géométrie qui satisfait les axiomes de distance et de symétrie il y a une infinité de points sur une demi-droite.

4) Deux angles opposés par le sommet sont toujours supplémentaires.

Exercice 13 (Optionnel)

Un problème. (20 points)
Trois caméras sont placées sur un plateau de télévision aux points A, B et C indiqués ci-dessous. Bertrand Piccard décide de s'installer à égale distance de chacune des caméras. Où doit-il placer sa chaise ? Construis ta solution (sans donner la marche à suivre), mais justifie brièvement ta réponse.