Cours Euler: Corrigé 10

6 novembre 2024

Exercice 1

1) Le lieu géométrique des points du plan dont la projection sur d est le point S est la perpendiculaire p à d au point S.

   En effet, soit P un point de ce lieu, c'est-à-dire tel que $\mathrm{proj}_d(P) = S$. Alors la perpendiculaire à d issue de P coupe d en S. Comme cette perpendiculaire est unique, elle doit être égale à p. D'où P appartient à p. Inversement, soit P un point de p. Cette perpendiculaire intersecte d en S et donc S est la projection de P sur d par définition.

2) Il faut tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{C}$. Le point P est alors l'intersection de cette bissectrice avec le segment $[AB]$. En effet la bissectrice est le lieu des points équidistants des demi-droites $[CA$ et $[CB$.

Exercice 2

Soient a, b deux droites perpendiculaires. Elles sont donc distinctes. Soit $A \in a$ n'appartenant pas à b. Donc A appartient à un demi-plan ouvert déterminé par b. Donc $A' = S_b(A) \in a$, dans l'autre demi-plan ouvert déterminé par B. Dans cette situation, par l'axiome des demi-plans, un point du segment $[AA']$ (et donc de la droite a) est sur b. Vu que $a \neq b$, elles n'un qu'un point en commun et donc se coupent.

Exercice 3

Nautile cloisonné. Le centre n'est jamais atteint ! Nous démontrons ceci par l'absurde. C'est-à-dire, nous supposons que le centre du cercle est atteint en un nombre fini d'étapes et nous en déduisons une contradiction. Lorsqu'on trouve une contradiction, notre hypothèse de départ doit être fausse. D'où nous aurons prouvé que le centre ne peut pas être atteint en un nombre fini d'étapes.
Supposons donc qu'un des points n est le centre du cercle. Notons $[OY]$ le segment contenant n et $[OX]$ le segment contant le point $n-1$ construit à l'étape précédente (X et Y sont des points consécutifs parmi A, B, C,..., T). Le segment perpendiculaire à $[OY]$ utilisé pour construire n passe par n et $n-1$. Mais comme n est le centre, ce segment doit être contenu dans le rayon $[OX]$. Ceci implique que OX est perpendiculaire à OY. Or, on sait que l'angle entre OX et OY n'est pas de 90 degrés, mais de $\frac{360}{20} = 18$ degrés. D'où une contradiction. Donc le centre du cercle n'est pas atteint en un nombre fini d'étapes.
Remarquons que la seule chose que nous avons utilisé dans la démonstration est le fait que 360 divisé par le nombre de parties dont le cercle a été divisé n'est pas 90 (l'angle est 90 si et seulement si le cercle est divisé en 4 parties). Donc nous obtenons le même phénomène si on divise le cercle en un nombre quelconques de parties supérieur à 4 (si le nombre de parties est plus petit que 4 il n'est pas possible de construire le Nautile).

Exercice 4

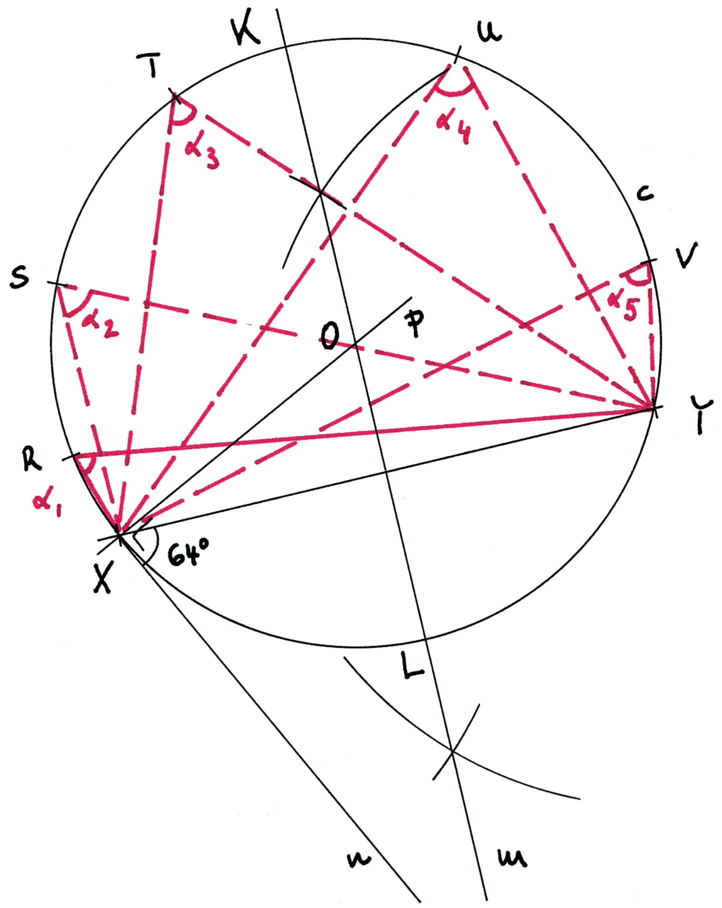
L'arc capable.

Corrigé

79.

Les angles α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 mesurent tous 64° ou 116°, suivant comment sont placées les lettres *R*, *S*, *T*, *U* et *V*.

Ce sont des angles inscrits qui ont tous le même angle au centre $\widehat{XOY} = 128°$.



Exercice 5

Cas d'un angle nul ou plat
Si Sab est nul, alors l'angle Tc est l'angle cherché. S'il est plat, alors l'angle plat de sommet T et de droite c est l'angle cherché.
Remarque : on verra plus tard qu'il existe toujours une isométrie envoyant un segment sur un autre segment de même longueur. Sur deux droites (ou deux demi-droites) on peut choisir des segments de même longueur. Il y a une isométrie qui envoie l'un sur l'autre, et donc la première droite (ou demi-droite) sur la deuxième. Autrement dit, deux (demi-)droites sont toujours isométriques.
Cas d'un angle ni nul ni plat
Supposons maintenant que l'angle Sab soit ni nul ni plat. Choisissons deux points $A, B \neq S$ sur Sa et Sb respectivement. Reportons la longueur $\overline{SA}$ sur Tc, obtenant un point C. Vu l'angle est ni nul ni plat, SAB est un triangle. Par l'axiome de construction des triangles, il existe exactement deux points D, D' tels que $\overline{TD} = \overline{SB}$ et $\overline{CD} = \overline{AB}$. Les angles de sommet T, de côté Tc et $[TD$ ou $[TD'$ sont les angles cherchés. En effet :

— Existence de l'angle isométrique de côté Tc : Les triangles TDS et $TD'S$ sont isométriques par la réflexion c. Nous démontrerons plus tard qu'ils sont isométriques au triangle ASB (par cas d'isométrie des triangles) et donc que les angles obtenus sont bien isométriques à l'angle de départ.

— Unicité de l'angle : Ce sont les uniques solutions au problème car si Tcd est isométrique à Sab, cette isométrie f doit envoyer un des côtés sur Tc. Si ce n'est pas Sa, alors on la précomposant avec la symétrie par la bissectrice de Sab, on obtient une isométrie qui envoie le premier angle sur le deuxième et Sa sur Tc. Le point B doit alors obligatoirement être envoyé sur D et D'.

Marche à suivre (cas angle ni nul ni plat)

1. On choisit sur les demi-droites de l'angle donné Sab un point $A \in Sa$ et un point B sur Sb.
2. On reporte la distance $\overline{SA}$ sur la demi-droite Tc donnée. Appelons le point ainsi construit C.
3. On trace le cercle de rayon $\overline{SB}$ centré en T et le cercle de rayon $\overline{AB}$ centré en C.
4. Ces cercles se coupent en exactement deux points D et D'. Les demi-droites $[TD$ et $[TD'$ déterminent avec Tc deux angles rectilignes isométriques à l'angle Sab.

Exercice 6

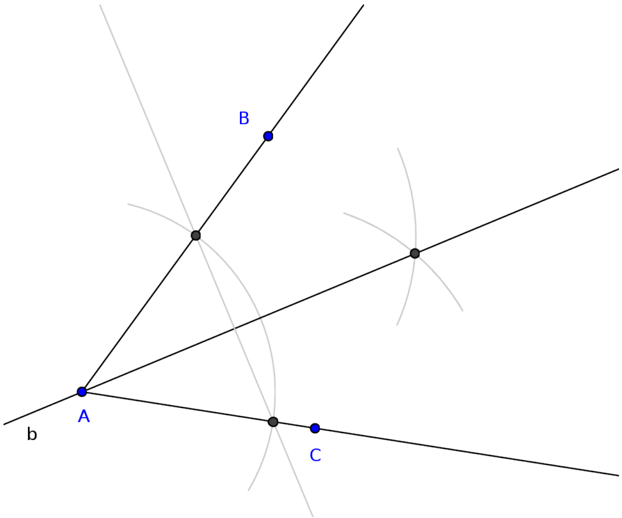
Non	Non	Pas de côté commun !
Oui, le sommet C	Oui, le côté $[CA$	Non
Oui, le sommet A	Oui, le côté $[AB$	Oui
Oui, le sommet A	Non	Pas de côté commun !
Non	Non	Pas de côté commun !
Oui, le sommet A	Oui, le côté $[AC$	Oui

Exercice 7

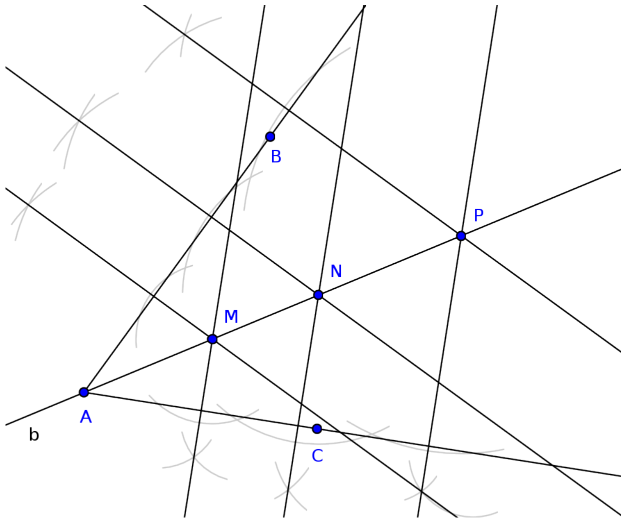
1. La femme a raison dans le sens que sur le dessin la route $[MB]$ est préférable à la route $[MA]$. Mais personne n'a raison dans le sens que ni $[MA]$ ni $[MB]$ est le chemin le plus court, parce que le chemin le plus court est $[MP]$, où P dénote la projection de M sur la droite AB.

2. Pour que la ruche soit à égale distance des points A et B, il faut qu'elle soit sur la médiatrice du segment $[AB]$. Il faut donc placer la ruche sur le point de cette médiatrice le plus proche de M. Ce point est la projection de M sur la médiatrice du segment $[AB]$. Il n'y a pas d'autre endroit qui donne satisfaction à l'apiculteur.

3. a) On construit la bissectrice b avec la méthode donnée au cours :



b) On choisit trois points M, N et P sur b et construit :



c) $d(M, AB) = d(M, AC)$, $d(N, AB) = d(N, AC)$ et $d(P, AB) = d(P, AC)$.

d) Tous les points de la bissectrice d'un angle sont équidistants des demi-droites qui définissent cet angle.

Exercice 8

a) Une symétrie centrale dont le centre est A ou une symétrie axiale dont l'axe de symétrie est la droite passant par A perpendiculaire à la bissectrice de $\widehat{A}_1$.

b) Les angles rectilignes $\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_2$ sont isométriques.

c) $\widehat{A}_1$ est appliqué sur $\widehat{A}_2$ par une des isométries du point a).

d) Non, les angles $\widehat{C}_1$ et $\widehat{C}_2$ ne jouissent pas de la même propriété, car le point C n'est pas l'intersection de deux droites.

Exercice 9

Remarque : on utilise en préambule le fait que deux droites perpendiculaires se coupent pour définir O. A et B sont définis par les axiomes de la distance (l'énoncé sous-entend qu'ils sont à distance non-nulle de O).

1) Une isométrie envoie une droite sur une droite. De plus, vu que $O \in a \cap b$, $O' = f(O) \in f(a) \cap f(b) = a' \cap b'$. Or $f(a) \neq f(b)$ (merci à une élève de m'avoir indiqué que ce n'est pas évident, bien que f soit injective). Pour le voir, prendre deux points $A, B \in a \backslash b$ et un point $C \in b \backslash a$ (possible car $a \neq b$). C'est un triangle vu que $C \notin a$ et donc ses côtés vérifient l'axiome de construction des triangles. En posant A', B', C' leur images sous f, f étant une isométrie, on en conclut que $A'B'C'$ est un triangle et donc que $C' \notin a' = A'B'$. Donc O' est l'intersection de a' et de b'.
2) O fait partie du segment $[AB]$. Donc O' fait partie du segment $[A'B']$ par préservation des segments par les isométries. De plus, une isométrie préserve les distances et donc $\overline{A'O'} = \overline{AO} = \overline{BO} = \overline{B'O'}$.
3) O et M sont distincts par hypothèse et on a vu que les isométries transforment des points distincts en des points distincts (elles sont injectives).
4) Pour commencer, noter que $A \notin b$ car $A \neq O$ qui est le seul point commun de a et b. b est perpendiculaire à a et donc est un axe de symétrie de a. La symétrie b transforme A en un point de a de l'autre côté de b (car $A \notin b$), à même distance de O (car $O \in b$ est fixé). Mais il n'y a qu'un seul point sur cette demi-droite Oa qui vérifie cette condition (axiome du report d'une distance sur une demi-droite). C'est donc le point B. Donc b est la médiatrice de $[AB]$ par le théorème de la médiatrice. Donc $d(A, M) = d(B, M)$. Comme f est une isométrie nous avons aussi que
$$d(A', M') = d(f(A), f(M)) = d(A, M) = d(B, M) = d(f(B), f(M)) = d(B', M').$$
5) O' et M' par cette propriété se trouvent sur la médiatrice de $[A'B']$ (car la médiatrice de $[A'B']$ est le lieu géométrique des points équidistants à A' et B'). Mais il ne passe qu'une droite par deux points (axiomes de connexion). Cette médiatrice est donc confondue avec b'.
6) On sait que la médiatrice d'un segment $[AB]$ est perpendiculaire à la droite AB. On a démontré que b' est la médiatrice de $[A'B']$, donc b' est perpendiculaire à $A'B' = a'$.

   On a donc montré que les isométries préservent la perpendicularité !

Exercice 10

Un casse-tête pour le plaisir. On observe que lorsque deux iguanes de couleurs différentes se rencontrent, le nombre d'iguanes de ces couleurs diminue d'un, alors que le nombre d'iguanes de la troisième couleur augmente de deux. Ainsi, la *différence* du nombre d'individus de deux populations de deux couleurs différentes reste égale, ou sinon augmente ou diminue de trois.
Par exemple, dans le cas où un iguane rouge rencontre un iguane jaune, il reste 14 iguanes rouges et 16 iguanes jaunes, si bien que la différence reste égale à deux ($16 - 14 = 17 - 15$), mais il y a à présent 15 iguanes jaunes et par conséquent la différence “iguanes rouges - iguanes verts" est passé de 2 à -1, elle a diminué de 3 pendant que la différence “iguanes verts - iguanes jaunes" est passé de -4 à -1, elle a augmenté de 3.
Autrement dit la différence de deux populations d'iguanes soit reste égale, soit reste égale “modulo 3”. Or, on demande s'il est possible que deux populations d'iguanes disparaissent, auquel cas la différence de leurs populations sera nulle, égale à zéro. Au départ cette différence vaut 2 ou 4. On ne peut atteindre zéro en ajoutant ou soustrayant 3, la réponse est que c'est impossible.