Cours Euler: Corrigé 9

30 octobre 2024

Exercice 1

1) Soit ABC un triangle. Nous admettons le fait que les médiatrices m_A et m_B des segments $[BC]$ et $[AC]$ se coupent en un point O. Le point O étant sur m_A est équidistant de B et C et, étant sur m_B, est équidistant de A et C. Il est donc équidistant de A et B. Il est donc sur la médiatrice m_C du côté $[AB]$. Appartenant aux trois médiatrices, et vu que les médiatrices ne sont pas confondues deux à deux (vu qu'elles se coupent deux à deux), il doit être leur point d'intersection.

2) Le point O étant à équidistance des trois sommets du triangle, si on note r cette distance, le cercle $\Gamma(O; r)$ passe par les trois sommets.

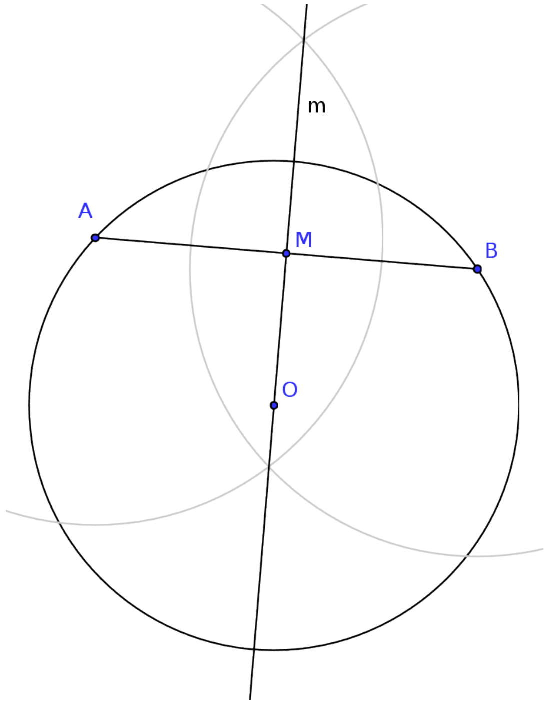
3) Si Γ' est un cercle passant par les trois sommets du triangle, alors les trois sommets sont à équidistances de son centre. Par conséquent, ce centre appartient aux médiatrices des trois côtés du triangle et donc est l'intersection de ces trois médiatrices. Il s'agit donc bien du cercle déjà obtenu.

4) Soit ABC un triangle. Construire les médiatrices m_A et m_B des côtés $[BC]$ et $[AC]$. Elles se coupent en un point O. Tracer le cercle de centre O et de rayon $\overline{OA}$. C'est le cercle cherché.

5) Tant que le point M n'est pas aligné avec le segment $[AB]$ (ce qui pourrait arriver suivant la position de la droite d par rapport au segment $[AB]$), on a un triangle ABM. L'intersection des médiatrices de $[AM]$ et $[BM]$ est aussi sur la médiatrice m de $[AB]$ par le point précédent. Donc P se déplace sur la médiatrice du segment $[AB]$. Si le point M est aligné avec A et B, alors on pourrait montrer que les médiatrices de $[AM]$ et $[BM]$ sont de même direction et donc que le point P n'existe pas !

Exercice 2

a) La situation est donnée ici :

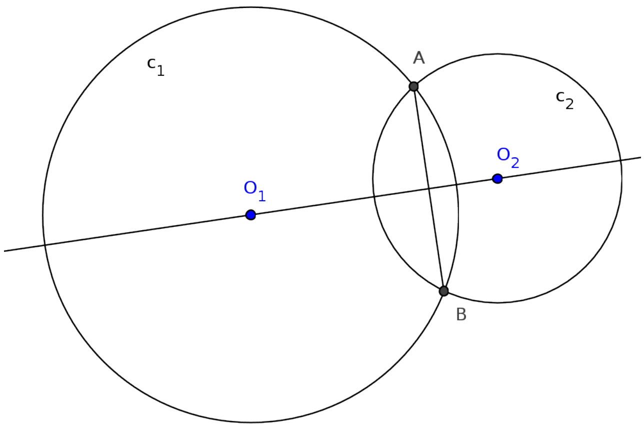


b) m est perpendiculaire à la droite AB et coupe $[AB]$ en M. C'est en fait la médiatrice de la corde $[AB]$.

c) La droite m passe par M qui est équidistant à A et B et par O qui est équidistant à A et B (vu que A et B sont sur un cercle centré en O). De plus, M et O sont distincts puisque $[AB]$ ne contient pas O. Il n'y a qu'une seule droite passant par M et O et la médiatrice de $[AB]$ passe par ces deux points vu qu'ils sont à équidistance de A et B.

d) Le diamètre coupant une corde qui n'est pas un diamètre en son point milieu coupe cette corde perpendiculairement.

a) La droite des centres est la droite passant par O_1 et O_2. La corde commune est le segment $[AB]$.



b) La droite des centres coupe la corde commune perpendiculairement et en son point milieu. Autrement dit, c'est sa médiatrice.

c) 1. L'axe de symétrie est la droite des centres. En effet, n'importe quelle droite passant par O_1 est un axe de symétrie de C_1. De plus, n'importe quelle droite passant par O_2 est un axe de symétrie de C_2. Donc la droite passant par O_1 et O_2 est un axe de symétrie des cercles C_1 et C_2.

   2. Vu que la droite $m = O_1O_2$ est un axe de symétrie de C_1 et de C_2 elle envoie A sur un point appartenant à C_1 et C_2. Vu que A n'est pas sur cette droite (les cercles sont sécants et non tangents), A ne reste pas fixe sous la symétrie d'axe m et donc il doit être envoyé sur B, l'unique autre point d'intersection des deux cercles.

   3. Cet axe de symétrie est la médiatrice de $[AB]$. En effet, on sait que $[AB]$ est une corde de C_1 et de C_2. Donc O_1 est équidistant de A et B. De plus, O_2 est aussi équidistant de A et B. Donc la droite passant par O_1 et O_2 est la médiatrice de $[AB]$.

d) Etant donnés deux cercles de centres O_1 et O_2 sécants en A et B, la droite des centres O_1O_2 est perpendiculaire à la corde AB.

Exercice 3

a) On trace un cercle centré en P et de rayon 2cm et on choisit un point A sur cercle. On trace la droite AP. La droite d est la perpendiculaire à AP passant par A (on a ainsi construit la tangente au cercle passant par le point A).

b) Oui, il y a d'autres droites qui répondent à la question posée. En fait, il y en a une infinité (une pour chaque point du cercle centré en P de rayon 2cm).

c) Il suffit de construire un point B distinct de A, toujours à 2cm de P. Puis de répéter le processus décrit ci-dessus, en remplaçant A par B.

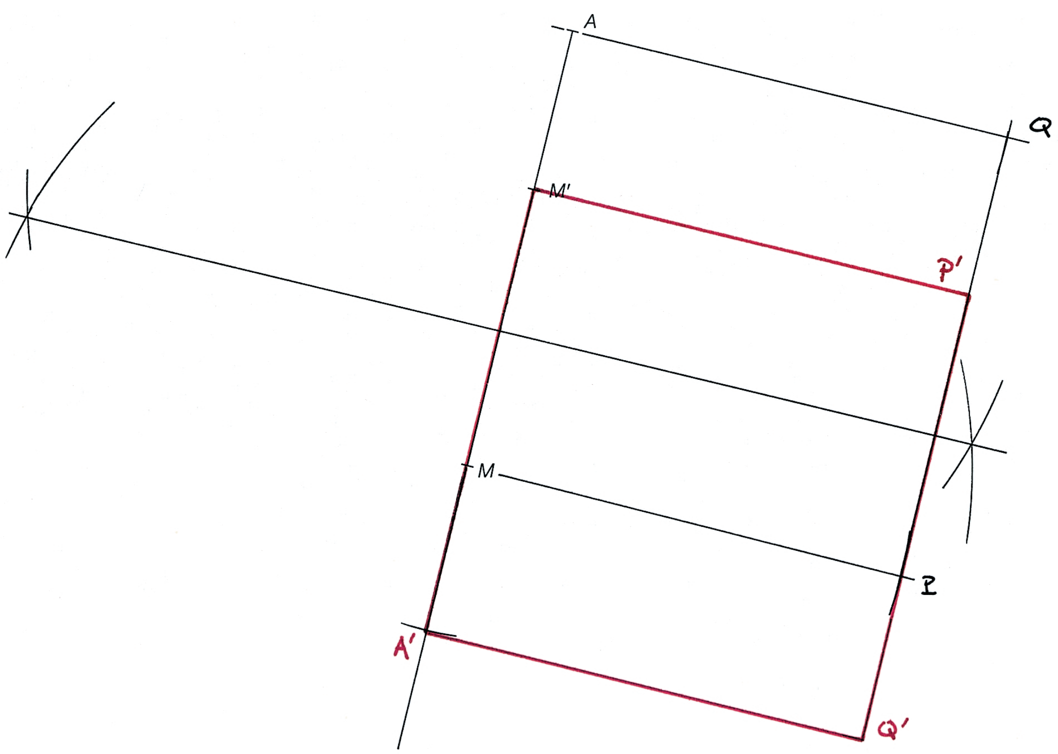
Exercice 4

Corrigé

157.

L'axe de symétrie d est confondu avec la médiatrice du segment MM' .

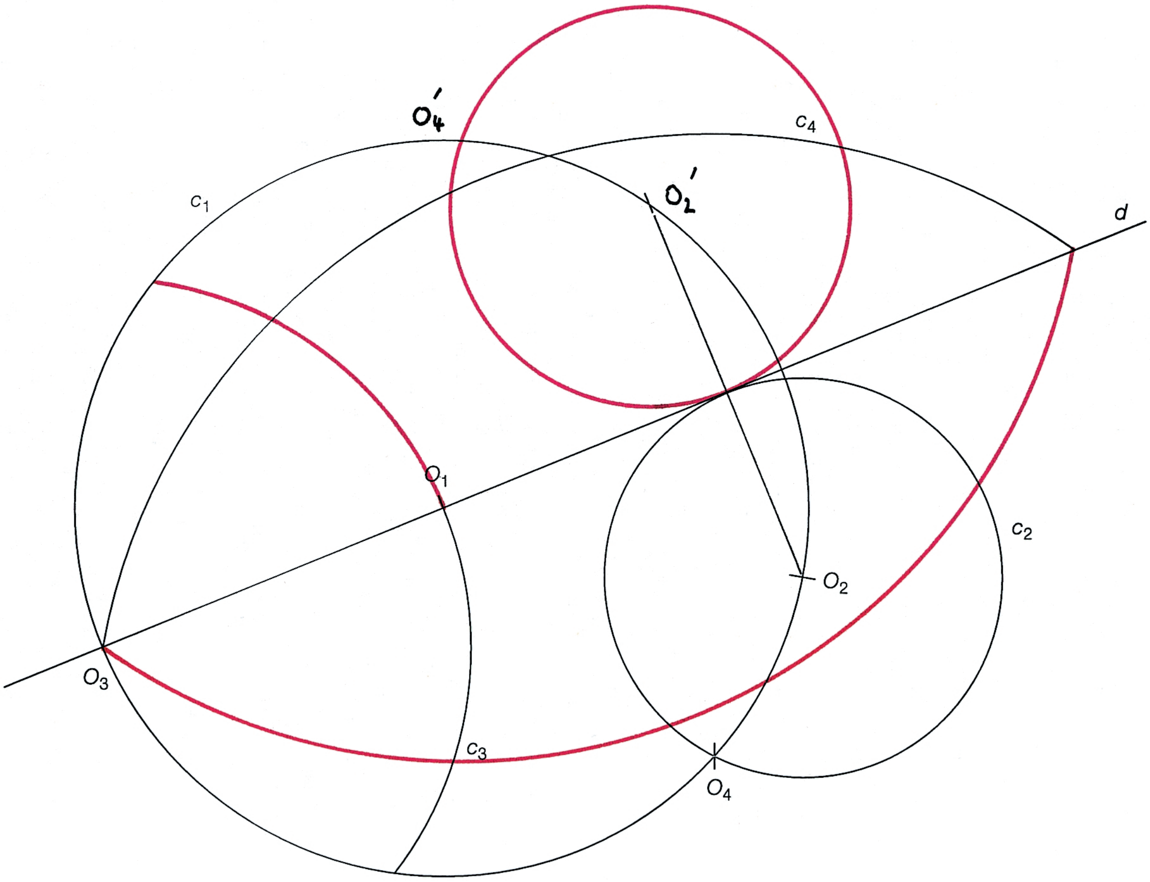
Dans la construction ci-dessous, les sommets du carré initial sont numérotés dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique positif). Dès lors, il existe une seconde solution, si les sommets de ce même carré sont numérotés dans le sens des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique négatif).



Exercice 158

Corrigé

158.



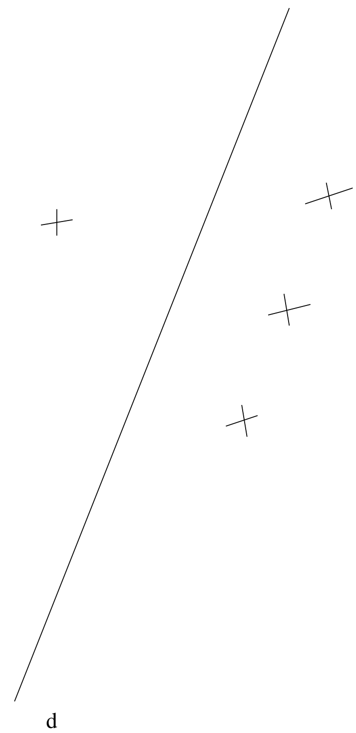
Exercice 5

Notons c la droite correspondante au canal, A et B les points où les deux fermes se trouvent et P un point sur le canal où on aimerait placer la station. Si A et B ne se trouvent pas dans le même demi-plan défini par c, le meilleur point P sera clairement l'intersection du segment $[AB]$ avec C car la distance la plus courte entre deux points est réalisée par le segment. Sinon, soit B' le symétrique de B par rapport à c. On va montrer que le meilleur point où placer la station est l'intersection de la droite AB' avec c.
Notons que la distance entre un point P dans c et B est la même que celle entre P et B'. En effet, c est la médiatrice du segment $[BB']$.
Donc $d(B, P) + d(A, P) = d(B', P) + d(A, P)$ pour tout P dans c. Ainsi le problème revient à placer le point P de manière à ce que le chemin pour aller de A à B' en passant par P soit le plus court. Or, le chemin le plus court entre A et B' est le segment $[AB']$. Il faut par conséquent placer P sur l'intersection du segment $[AB']$ et de la droite c.

Exercice 6

Sur la donnée.

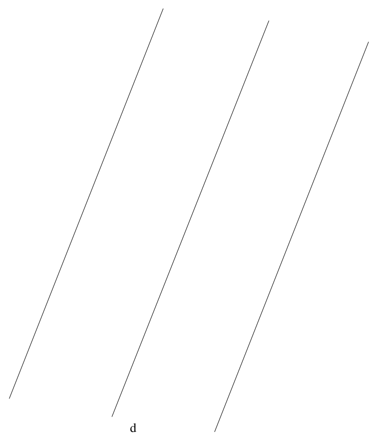
a) Voici 4 points à distance $1,5$ cm de d :



b) Les points à $1,5$ cm de d forment deux droites (voir figure ci-dessous).

c) On construit grâce à l'équerre graduée deux points distincts à distance 1,5 cm de d, et dans le même demi-plan défini par d. Ensuite, on trace la droite passant par ces deux points. On répète le même processus dans le demi-plan de l'autre côté de d.

On pourrait aussi utiliser le compas pour tracer une perpendiculaire à d et reporter deux points de part et d'autre de d à une distance de 1,5 cm.



Exercice 7 (Optionnel)

1) On indique le nombre de litres qui se trouvent dans chaque bidon à chaque étape, l'ordre des bidons étant 10 litres – 5 litres – 3 litres. Pour passer d'une étape à une autre on verse à chaque fois le contenu d'un bidon dans un autre (ou jusqu'à ce que l'autre soit plein).

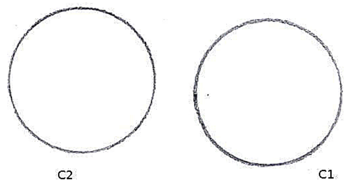
Etape 1 : 10 – 0 – 0
Etape 2 : 3 – 7 – 0
Etape 3 : 3 – 4 – 3
Etape 4 : 6 – 4 – 0
Etape 5 : 6 – 3 – 1
Etape 6 : 9 – 0 – 1
Etape 7 : 2 – 7 – 1
Etape 8 : 2 – 5 – 3
Etape 9 : 5 – 5 – 0

2) Cette équation *diophantienne* (c'est le nom de ce type d'équation où seules les solutions entières nous intéressent) a une solution évidente pour ceux qui connaissent le nombre de jours de chaque mois. On choisit $x = 1$ (février), $y = 4$ (ce sont les mois d'avril, juin, septembre et novembre) et $z = 7$. On vérifie que $1 \cdot 28 + 4 \cdot 30 + 7 \cdot 31 = 365$.

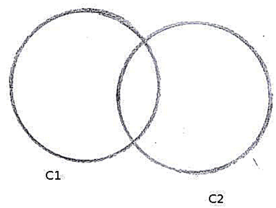
Exercice 8

Les cercles.

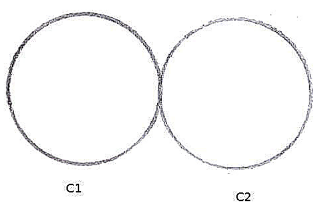
1. **Lorsque** $d > 2r$ **:** Les deux cercles sont disjoints.



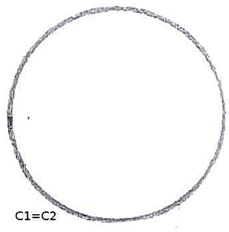
Lorsque $0 < d < 2r$ **:** Les deux cercles se coupent en exactement deux points.



Lorsque $d = 2r$ **:** Les deux cercles se coupent en exactement un point. On dit qu'ils sont *tangents*.



Lorsque $d > 0$ **:** Les deux cercles sont les mêmes, on dit alors qu'ils sont *confondus*. On obtient ainsi un unique cercle.



2. Il y en a une infinité. Le lieu géométrique des centres de ces cercles est la médiatrice du segment $[AB]$. Par l'inégalité triangulaire, le plus petit est celui dont le diamètre est $[AB]$ et son centre est le milieu de $[AB]$.
3. Ces centres décrivent un cercle de centre C de rayon r. En effet, chaque centre est à distance r du point C.

Exercice 9

On trace les segments reliant le point A (Genève) aux autres aéroports. Le lieu des points plus proches de Genève que d'un autre aéroport donné, disons B (Lyon), est le demi-plan contenant Genève dont la frontière est la médiatrice de $[AB]$. Il suffit donc de tracer les 5 médiatrices et de tracer le polygone déterminé par les médiatrices. L'intérieur ressemble à ceci :