

# Cours Euler: Corrigé 8

1<sup>er</sup> novembre 2023

## Exercice 1

### Une transformation du plan.

- Vérifions que pour tout point  $P \in \pi$ , la correspondance  $f$  fait correspondre un seul point à  $P$ .
  - Si  $P = A$ , alors  $B$  est l'unique point que  $f$  fait correspondre à  $A$  par définition de  $f$ .
  - Si  $P = B$ , alors  $A$  est l'unique point que  $f$  fait correspondre à  $B$  par définition de  $f$ .
  - Si  $P \neq A$  et  $P \neq B$ , alors  $P$  est l'unique point que  $f$  fait correspondre à  $P$  par définition de  $f$ .

- Oui : Soient  $P \neq Q$  deux points distincts du plan  $\pi$ . On a, sans perte de généralité, trois cas possibles :

(a)  $P \neq A, P \neq B, Q \neq A$  et  $Q \neq B$ . Alors  $f(P) = P \neq Q = f(Q)$ .

(b)  $P = A$  et  $Q \neq B$ . Alors  $f(P) = B \neq Q = f(Q)$ .

(c)  $P = A$  et  $Q = B$ . Alors  $f(P) = B \neq A = f(Q)$ .

Les cas où  $P = B$  se traitent de la même manière.

- Oui : Si  $P$  est un point du plan, il y a 3 cas possibles :

(a)  $P \neq A$  et  $P \neq B$ . Alors  $P$  est l'image de  $P$  par  $f$ .

(b)  $P = A$ . Alors  $P$  est l'image de  $B$  par  $f$ .

(c)  $P = B$ . Alors  $P$  est l'image de  $A$  par  $f$ .

- Remarquons que  $f(f(P)) = P = f(f(P))$  pour tout point  $P$  du plan. Donc,  $f$  est son propre inverse.

- Notons  $x$  la distance entre  $A$  et  $B$  :

$$x = d(A, B).$$

Soit  $P$  un point à distance  $\frac{x}{4}$  du point  $A$ . Alors  $P \neq A, P \neq B$  et  $d(P, B) \geq \frac{3}{4}x$  par l'inégalité triangulaire. On a donc

$$d(f(P), f(A)) = d(P, B) \geq \frac{3}{4}x > \frac{x}{4} = d(P, A).$$

Alors  $f$  n'est pas une isométrie car  $d(f(P), f(A)) \neq d(P, A)$ .

- L'image du segment  $[AB]$  est encore le segment  $[AB]$ . En effet, tous les points du segment restent fixes sauf  $A$  et  $B$ , qui changent de place l'un avec l'autre.

**Exercice 2****Une autre transformation du plan.**

1. On peut écrire :

$$f : \pi \longrightarrow \pi$$

$$P \longmapsto \begin{cases} P & \text{si } O \text{ et } P \text{ sont du même côté de } d \\ (OP) \cap d & \text{si } O \text{ et } P \text{ ne sont pas du même côté de } d, \\ P & \text{si } P \in d. \end{cases}$$

Il faut vérifier que pour tout point  $P \in \pi$ , la correspondance  $f$  fait correspondre un unique point à  $P$ .

Dans les cas 1. et 3. de l'énoncé, le point  $P$  est l'unique point que  $f$  fait correspondre à  $P$ .

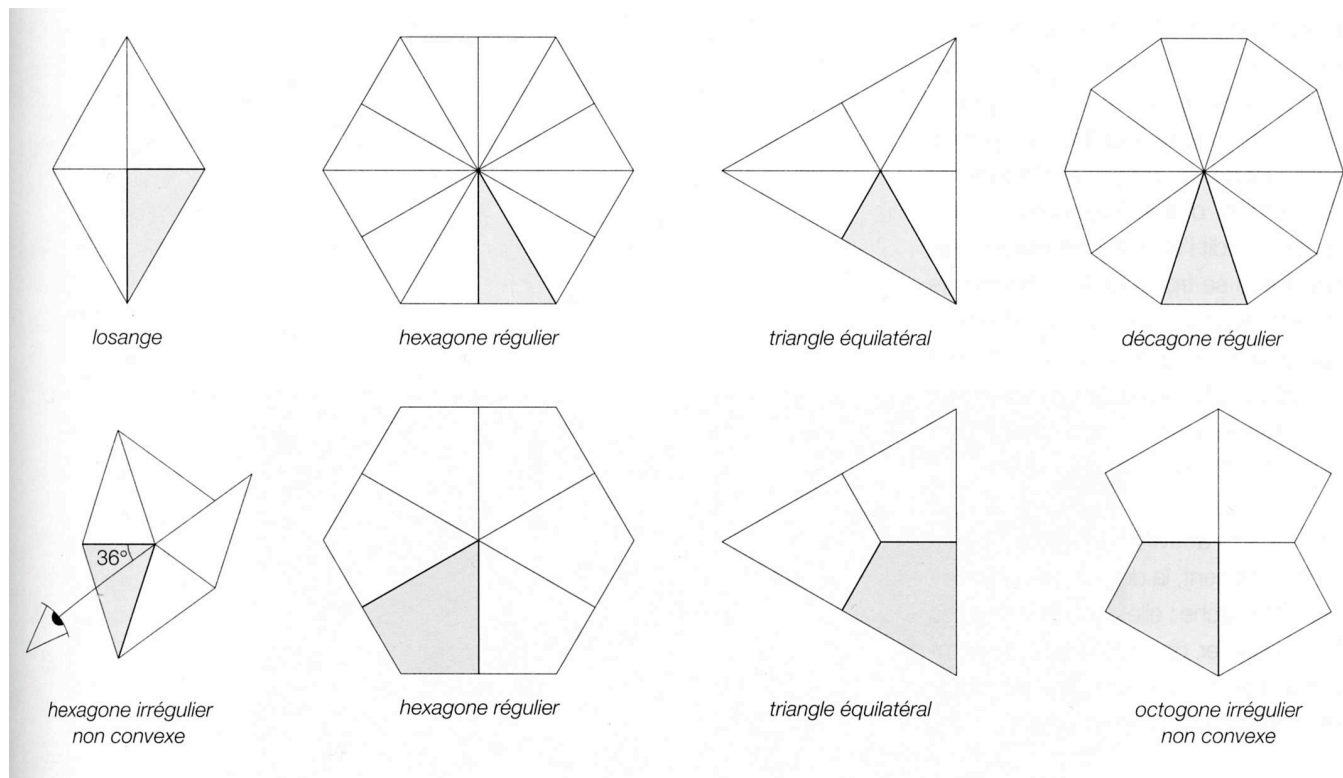
Dans le cas 2. : Remarquons que  $P \neq O$  car  $P$  et  $O$  ne sont pas du même côté. Nous devons montrer que l'intersection  $(OP) \cap d$  contient exactement un point. Comme deux droites ont au plus un point en commun, il suffit de montrer que  $OP$  et  $d$  se coupent. Or, le segment  $[OP]$  coupe  $d$  en un point par l'axiome du demi-plan.

2. Non : Remarquons que  $f(f(P)) = f(P)$  pour tout point  $P$  du plan. Soit  $P$  un point qui n'est pas du même côté que  $O$  par rapport à  $d$ . Posons  $Q = f(P)$ . Alors  $Q$  et  $P$  sont distincts, car  $Q \in d$ , mais  $P$  n'appartient pas à  $d$ . Comme  $f(P) = f(f(P)) = f(Q)$ , la transformation  $f$  ne transforme pas deux points distincts en deux points distincts.
3. Non : Un point  $P$  de l'autre côté du point  $O$  par rapport à  $d$  n'est pas dans l'image de  $f$ .
4. La transformation  $f$  n'admet pas d'inverse.
5. Comme la transformation  $f$  n'admet pas d'inverse, elle n'est pas une isométrie.
6. Soient  $P$  et  $Q$  deux points distincts, et considérons le segment  $[PQ]$ . Énonçons tous les cas possibles :
  - (a)  $P$  et  $Q$  sont dans le même demi-plan que  $O$  par rapport à  $d$ . Donc l'image par  $f$  de  $[PQ]$  est  $[PQ]$ .
  - (b)  $P$  est dans le même demi-plan que  $O$  par rapport à  $d$ , et  $Q$  ne l'est pas. Le segment  $[PQ]$  coupe  $d$  en un point, qu'on note  $R$ . En cas où  $P$  appartient à la frontière  $d$ , on a  $R = P$  et nous regardons « le segment »  $[PR]$  comme un point.
    - i. Si  $P$ ,  $Q$  et  $O$  sont alignés, alors l'image par  $f$  est le segment  $[PR]$ . En effet, l'image par  $f$  d'un point sur le segment  $[RQ]$  est  $R$ .
    - ii. Sinon, l'image par  $f$  de  $Q$  est un point sur la droite  $d$ , qu'on note  $S$ . Donc l'image par  $f$  d'un point sur le segment  $[RQ]$  est sur le segment  $[RS]$ . Finalement, on obtient que l'image par  $f$  de  $[PQ]$  consiste en deux segments : les segments  $[PR]$  et  $[RS]$ .
  - (c)  $P$  et  $Q$  ne sont pas du même côté de  $O$  par rapport à  $d$ . Notons  $R = f(P)$  et  $S = f(Q)$ . Alors l'image du segment  $[PQ]$  par  $f$  est le segment  $[RS]$ . Il se peut que  $R = S$ . Dans ce cas on regarde le segment  $[RS]$  comme un point.
7. Soit  $d'$  une droite du plan. On a plusieurs cas possibles :
  - (a) Si  $d'$  est entièrement du même côté que  $O$  par rapport à  $d$ , alors tous les points de  $d'$  sont fixés par  $f$  (ceci peut se produire seulement si  $d$  et  $d'$  sont parallèles).
  - (b) Si  $d'$  est parallèle à  $d$  mais elle n'est pas du même côté que  $O$  par rapport à  $d$ , alors l'image de  $d'$  est  $d$ .

- (c) Si  $d'$  coupe  $d$  en un point  $P$  notons  $d'_1$  la demi-droite contenue dans  $d'$  et dans le demi-plan du même côté que  $O$  par rapport  $d$ , et  $d'_2$  l'autre demi-droite de  $d'$ . Soit encore  $p$  la parallèle à  $d'$  passant par  $O$  et  $Q$  le point d'intersection avec  $d$ . Si  $O$  est dans  $d'$ , l'image de  $d'$  par  $f$  est  $d'_1$  car l'image de  $d'_2$  est le point  $P$  et  $d'_1$  reste fixé par  $f$ . Sinon l'image d'un point de  $d'_2$  se trouve sur le segment  $[P, Q[$ . L'image de  $d'$  est dans ce cas l'union de  $d'_1$  et de  $[P, Q[$ .

### Exercice 3

On obtient les figures suivantes :



### Exercice 4

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

Les lettres A, B, C, D, E, H, I, M, O, T, U, V, W, X et Y admettent un axe de symétrie.  
Les lettres H, I, O et X admettent au moins 2 axes de symétrie.

### Exercice 5

**La contraposée.** On doit montrer que si  $C$  est un point qui ne se trouve pas sur la droite  $AB$ , alors  $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AB}$ . La contraposée de cette affirmation est la suivante :

$$\ll \text{Si } \overline{AB} \geq \overline{AC} + \overline{CB}, \text{ alors } C \in AB. \gg$$

C'est cette contraposée que nous allons prouver maintenant. On constate d'abord par l'inégalité triangulaire (D3) que, si  $\overline{AB} \geq \overline{AC} + \overline{CB}$ , alors

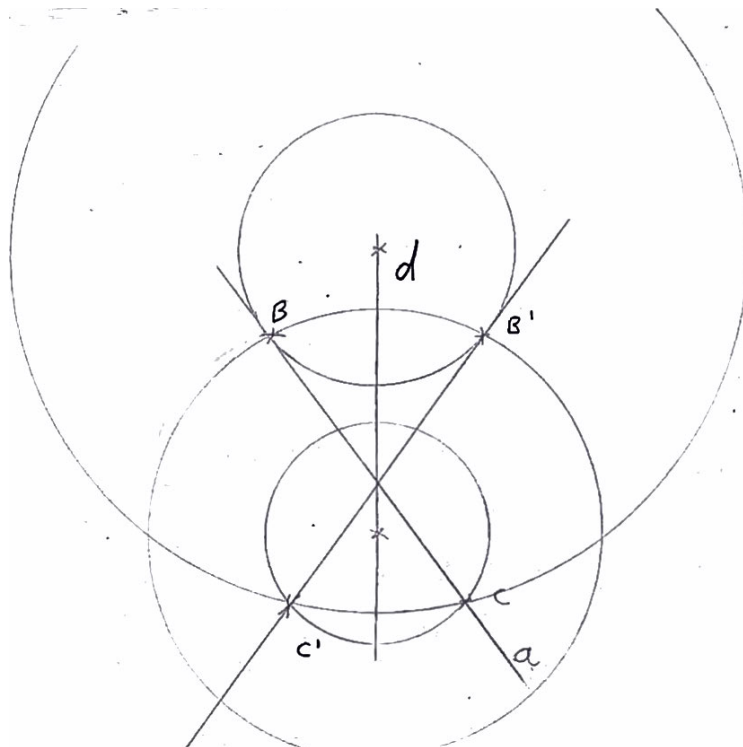
$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

(il n'est pas possible que  $\overline{AB} > \overline{AC} + \overline{CB}$ ). On applique maintenant l'axiome (D4) qui affirme que l'égalité  $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$  est vérifiée si et seulement si  $C$  appartient au segment  $[AB]$ . En particulier  $C$  se trouve sur la droite  $AB$ . La démonstration est terminée.

### Exercice 6

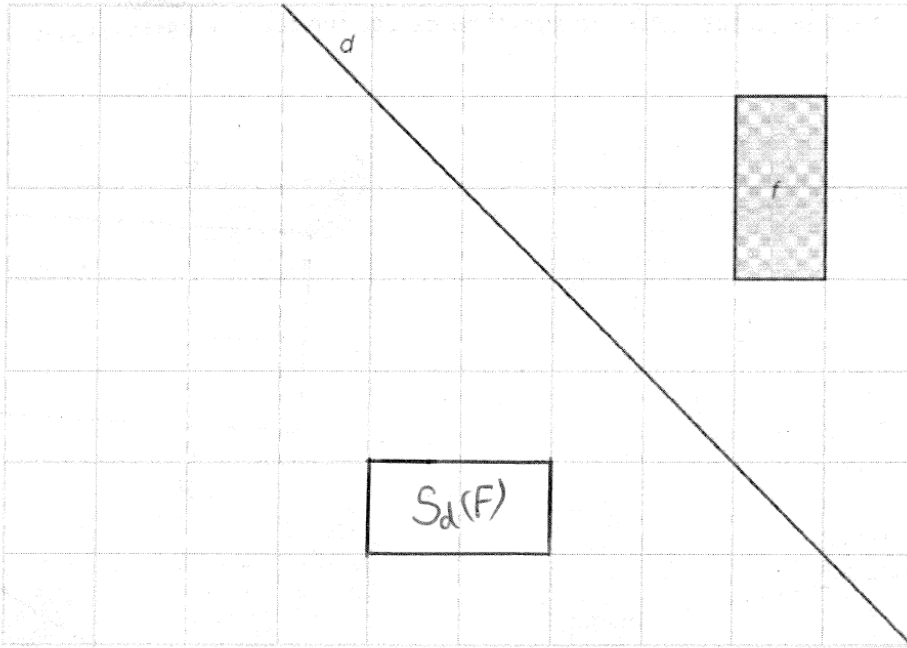
Voici une marche à suivre (construction ci-dessous) :

1. Choisir deux points distincts  $B$  et  $C$  sur  $a$  ;
2. Construire le symétrique  $B'$  du point  $B$  sous  $S_d$  ;
3. Construire le symétrique  $C'$  de  $C$  sous  $S_d$  ;
4. Tracer la droite  $B'C'$ , c'est l'image de  $a$  sous  $S_d$ .

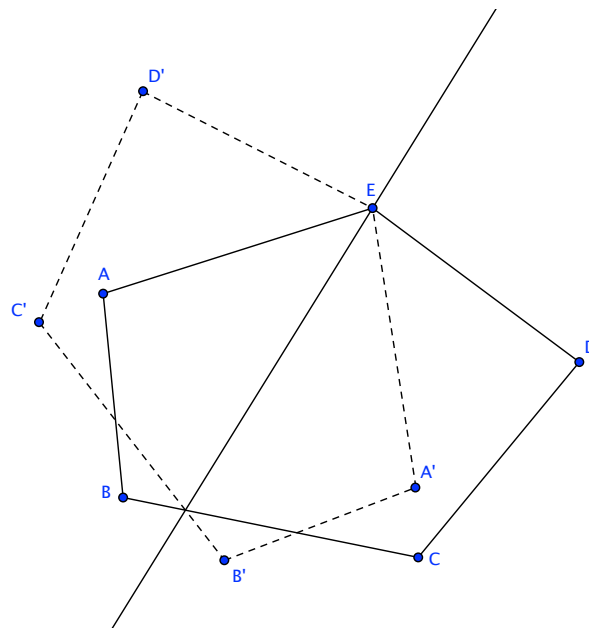


Cette construction marche dans tous les cas. Néanmoins, si  $a$  et  $d$  se coupent dans un point  $P$ , c'est avantageux de choisir  $B = P$  car le symétrique de  $P$  sous  $S_d$  est  $P$ . En particulier si  $a = d$ , alors  $a$  est l'image de  $a$  sous la symétrie d'axe  $d$  et il n'y a rien à faire.

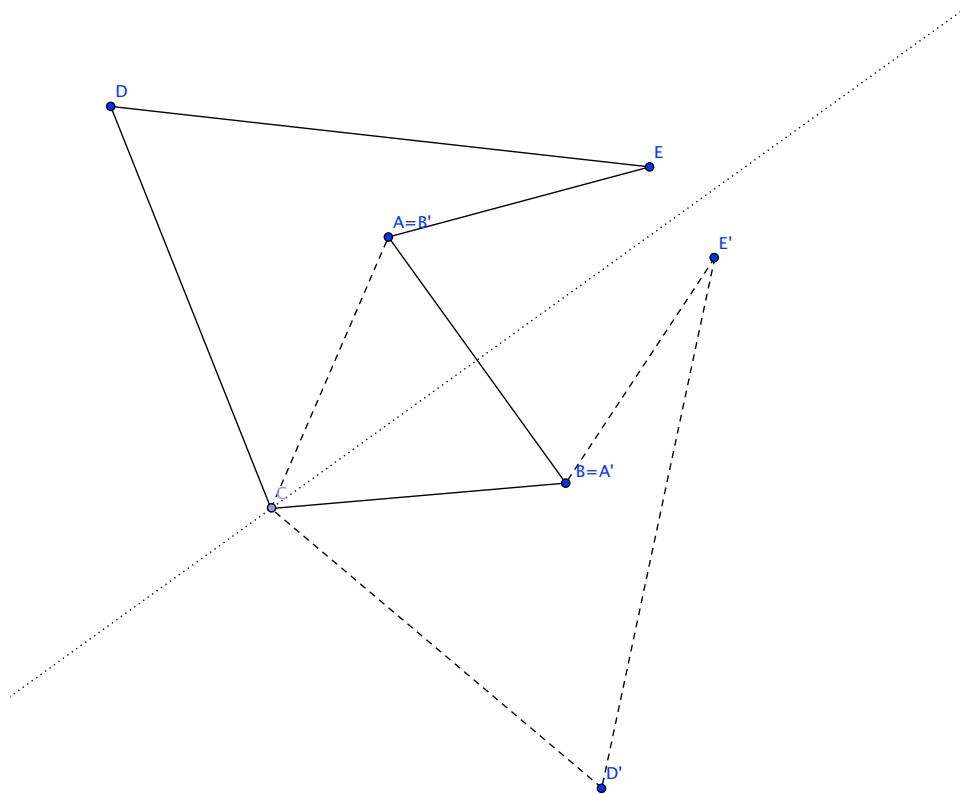
## Exercice 7



On montre l'image du pentagone  $ABCDE$  par la symétrie d'axe  $d$  en traitillé :



L'axe de symétrie, indiqué en pointillé, est la médiatrice du segment  $[AB]$  puisque  $A$  est l'image de  $B$  et vice-versa. L'image du pentagone est indiquée en traitillé.



### Exercice 8

- 1) Si  $A$  et  $B$  sont sur  $d$ , alors la figure admet une infinité d'axes de symétrie, car n'importe quel axe perpendiculaire à  $d$  est un axe de symétrie, ce qui entre en contradiction avec la donnée. Donc  $A$  et  $B$  ne peuvent pas être tous les deux sur  $d$ .

Si  $A$  est sur  $d$  mais pas  $B$ , alors il y a un unique axe de symétrie : cet axe est la droite perpendiculaire à  $d$  passant par  $B$ . Donc nécessairement  $A$  et  $B$  sont tous les deux hors de  $d$ .

Si  $A$  et  $B$  sont dans le même demi-plan défini par  $d$ , alors la figure admet au plus un axe de symétrie : si la droite passant par  $A$  et  $B$  est parallèle à  $d$ , alors l'axe de symétrie est la médiatrice du segment  $[AB]$ . Si  $B$  se trouve sur la droite perpendiculaire à  $d$  passant par  $A$ , alors l'axe de symétrie est cette perpendiculaire. Sinon il n'y a pas d'axes de symétrie.

Si  $A$  et  $B$  sont dans deux demi-plans distincts et ne sont pas sur  $d$ , alors il y a exactement deux axes de symétrie si et seulement si  $B$  est sur la perpendiculaire  $d$  passant par  $A$  et  $A$  et  $B$  sont à la même distance de  $d$ . Le premier axe est cette perpendiculaire, le second est  $d$  (qui est alors la médiatrice du segment  $[AB]$ ).

Enfin, on se trouve nécessairement dans le cas où  $A$  et  $B$  sont dans deux demi-plans distincts et ne sont pas sur  $d$ , et  $B$  est sur la perpendiculaire  $d$  passant par  $A$  et  $A$  et  $B$  sont à la même distance de  $d$ .

- 2) Ces points forment un triangle isocèle, mais non équilatéral. Si ce triangle est équilatéral, alors il y aurait 3 axes de symétrie.

- 3) Dans le cas le plus général (i.e. quand  $ABC$  est un triangle quelconque), il faut que  $D$  soit l'image de  $C$  par la symétrie d'axe  $AB$ . Par construction, la figure admet la droite passant par  $AB$  comme axe de symétrie. Si  $ABC$  possède déjà un axe de symétrie, alors cet axe n'est pas toujours un axe de symétrie de  $ABCD$ . Il en est un si la droite passant par  $AB$  est perpendiculaire à l'axe de symétrie de  $ABC$ .

### Exercice 9

- 1) Soit  $O$  le centre du cercle  $\Gamma$  et notons  $r$  le rayon de  $\Gamma$ . Soit  $d$  un diamètre de  $\Gamma$ . Par définition,  $S_d(\Gamma)$  est l'image de  $\Gamma$  par rapport à la symétrie d'axe  $d$  :  $S_d(\Gamma) = \{S_d(P) | P \in \Gamma\}$ .  
*Montrons que  $S_d(\Gamma) \subset \Gamma$ .* Soit  $P \in S_d(\Gamma)$ . Alors il existe  $Q \in \Gamma$  tel que  $S_d(Q) = P$ . Par définition,  $S_d$  laisse fixe tous les points de  $d$  donc  $S_d(O) = O$ . Comme  $S_d$  est en particulier une isométrie, on a

$$r = d(Q, O) = d(S_d(Q), S_d(O)) = d(P, O).$$

Donc  $P \in \Gamma$ . On a montré  $P \in S_d(\Gamma) \implies P \in \Gamma$ , d'où  $S_d(\Gamma) \subset \Gamma$ .

- 2) *Montrons que  $\Gamma \subset S_d(\Gamma)$ .* Soit  $P \in \Gamma$ . On a vu au cours qu'étant donné une isométrie  $f$ , tout point  $S$  du plan est l'image d'un point du plan sous  $f$ . En particulier, appliquant ceci à la symétrie  $S_d$  et au point  $P$ , on obtient qu'il existe un point  $R$  du plan tel que  $P = S_d(R)$ . Il reste à montrer que  $R \in \Gamma$ . Utilisant le fait que  $S_d$  est une isométrie et que  $S_d(O) = O$  (car  $O \in d$ ), on a

$$r = d(P, O) = d(S_d(R), S_d(O)) = d(R, O).$$

Donc  $R \in \Gamma$ . On a alors  $P \in S_d(\Gamma)$ . On a montré  $P \in \Gamma \implies P \in S_d(\Gamma)$ , d'où  $\Gamma \subset S_d(\Gamma)$ .

- 3) Par les deux points précédents,  $S_d(\Gamma) \subset \Gamma$  et  $\Gamma \subset S_d(\Gamma)$ , donc  $S_d(\Gamma) = \Gamma$ .