Cours Euler: Série 8

1$^{\text{er}}$ novembre 2023

Exercice 1

Une transformation du plan. Considérons deux points distincts A et B du plan. On définit une correspondance f du plan dans lui-même de la manière suivante :

$$\begin{array}{lcl} A & \mapsto & B \\ B & \mapsto & A \\ P & \mapsto & P \text{ si } P \neq A \text{ et } P \neq B \end{array}$$

1. Vérifie que cela définit une transformation $f : \Pi \to \Pi$ du plan.
2. Est-ce que cette transformation transforme deux points distincts en deux points distincts (f est-elle injective) ? Explique !
3. Est-ce que tout point du plan est l'image d'un point du plan (f est-elle surjective) ? Explique !
4. Si la réponse aux deux dernières questions est positive, alors il existe un inverse. Décris cette transformation si elle existe.
5. Montre que f n'est pas une isométrie.
6. Quelle est l'image du segment $[AB]$ par f ?

Exercice 2

Une autre transformation du plan. On donne une droite d et un point O non situé sur d. On considère la correspondance f du plan définie ainsi :

i) Si O et P sont du même côté de d, $f(P) = P$.

ii) Si O et P ne sont pas du même côté de d, $f(P)$ est l'intersection de OP avec d.

iii) Si P est sur d, $f(P) = P$.

1. Vérifie que cela définit une transformation $f : \Pi \to \Pi$ du plan.
2. Est-ce que cette transformation transforme deux points distincts en deux points distincts (f est-elle injective) ? Explique.
3. Est-ce que tout point du plan est l'image d'un point du plan (f est-elle surjective) ? Explique.
4. Si la réponse aux deux dernières questions est positive, alors il existe un inverse. Décris cette transformation si elle existe.
5. Montre que f n'est pas une isométrie.
6. Quelle est l'image d'un segment par f ? (Examine différents cas possibles.)
7. Quelle est l'image d'une droite par f ? (Examine différents cas possibles.)

Exercice 3

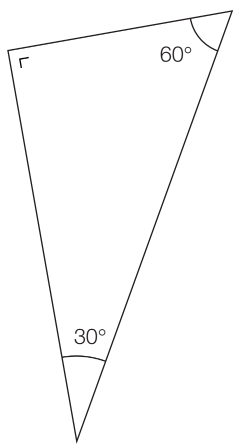
140. Rompre la glace

Place deux miroirs verticalement le long de deux côtés adjacents d'un de ces polygones.

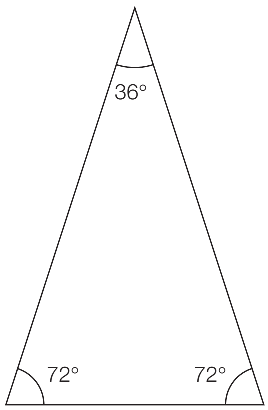
Construis la figure que tu as obtenue.

Et si tu choisis un autre polygone, arrives-tu à prévoir la figure que tu obtiendras ?

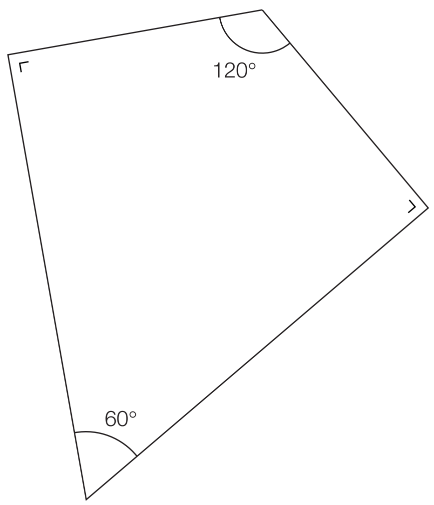
Essaie de la construire, puis vérifie.



140. Rompre la glace (suite 1)



140. Rompre la glace (suite 2)



Exercice 4

Ecris les lettres de l'alphabet en majuscules droites. Parmi ces lettres, lesquelles admettent un axe de symétrie ? Existe-t-il des lettres qui admettent deux axes de symétrie ou plus ?

Exercice 5

La contraposée. Soient A et B deux affirmations. La *contraposée* de l'affirmation « $A \Longrightarrow B$ » est l'affirmation « non $B \Longrightarrow$ non A ». Cette affirmation est équivalente à la première. En effet, supposons que A implique B. Alors, si « non B » est vraie, c'est-à-dire, si B est fausse, A ne peut être vraie puisqu'elle impliquerait B ! Ainsi « non B » implique « non A ».
En cours nous avons montré qu'une isométrie fait correspondre à deux points distincts deux points distincts en prouvant la contraposée de cette affirmation : si deux points ont la même image, alors ils sont égaux.

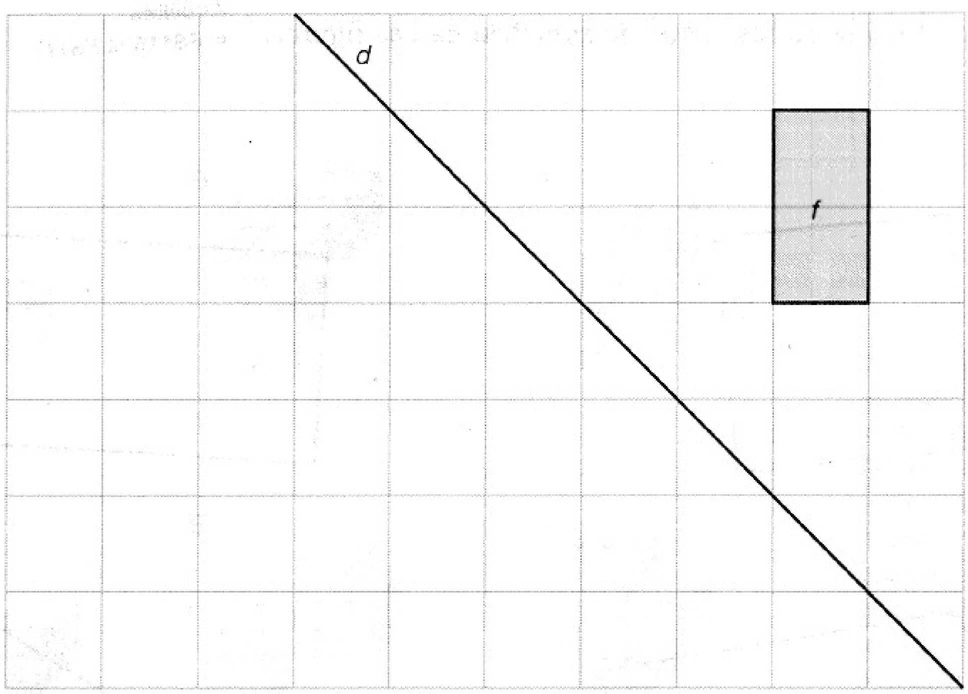
Démontre à l'aide des axiomes de la distance que si C est un point qui ne se trouve pas sur la droite AB, alors $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AB}$. Tu démontreras cela *en prouvant la contraposée* que je te laisse le soin de traduire en langage mathématique : « Si la somme des distances de A à C et de C à A n'est pas plus grande que la distance de A à B, alors forcément C appartient à la droite passant par A et B ».

Exercice 6

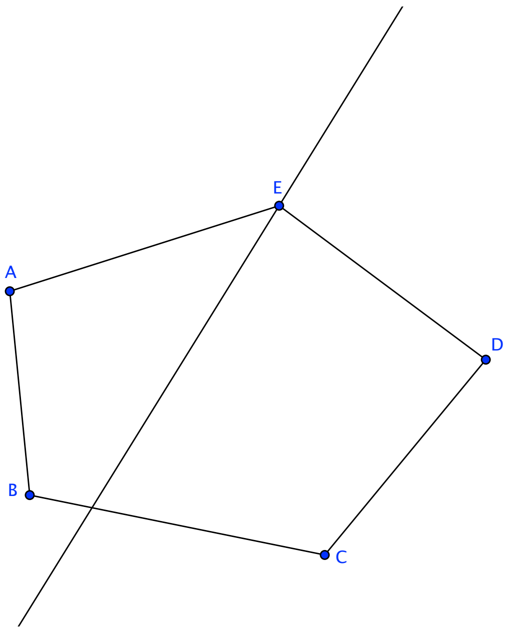
Construis l'image d'une droite a donnée sous la symétrie d'une droite d. Donne une marche à suivre. Différencie les cas selon la position relative des droites. Pour la marche à suivre, on suppose connue la construction du symétrique d'un point.

Exercice 7

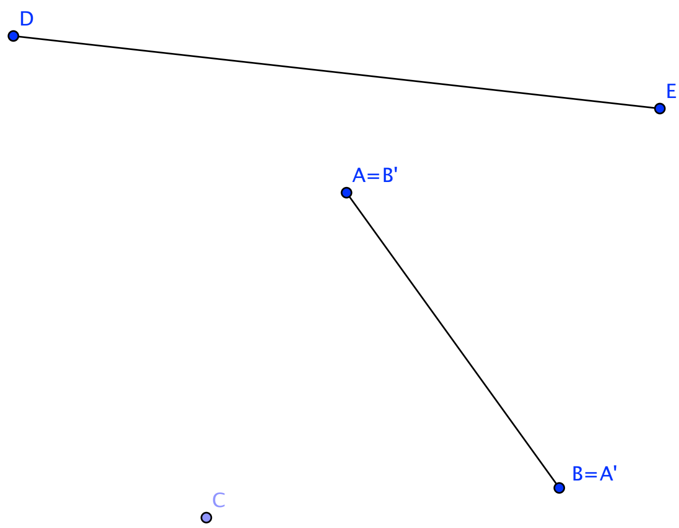
2 **a) Construis l'image f' de la figure f par une symétrie d'axe d.**



Construis l'image du pentagone $ABCDE$ par la symétrie d'axe d :



L'image du pentagone $ABCDE$ est un pentagone $A'B'C'D'E'$ par une symétrie axiale dont tu dois déterminer l'axe. Complète la figure et construis son image.



Exercice 8

1) Une figure formée d'une droite d et de deux points distincts A et B admet exactement deux axes de symétrie. Que peut-on dire au sujet de cette figure ?

2) Trois points non alignés forment une figure admettant un axe de symétrie unique. Préciser leurs positions respectives.

3) On donne trois points non alignés A, B, C. Où placer un quatrième point D de façon que la figure $ABCD$ admette un axe de symétrie ?

Exercice 9

Montre que tout diamètre d d'un cercle Γ est un axe de symétrie de ce cercle. On doit donc montrer que $S_d(\Gamma) = \Gamma$. *Relis bien la définition d'une symétrie axiale.* Suis les étapes suivantes :

1) Montre que $S_d(\Gamma) \subset \Gamma$.
   Indication. Quelle est la propriété commune de tous les points du cercle ?

2) Montre que $\Gamma \subset S_d(\Gamma)$.
   Indication. On a vu au cours que, étant donné une symétrie f, tout point du plan est l'image d'un point du plan sous f. Applique ceci à la symétrie S_d et aux points du cercle Γ).

3) Conclus la preuve de l'affirmation.