

Analyse I – Série 1

Avant-propos.

La plupart des exercices suivants sont tirés du livre “Analyse : Concepts et Contextes, Volume 1 : Fonctions d’une variable” de James Stewart, édition De Boeck, et ont été rassemblés par Peter Wittwer.

Le but est de repérer les faiblesses que vous pourriez avoir. Si vous avez des difficultés pour résoudre ces exercices, il est vivement conseillé de rattraper le matériel en question.

♦ Les sujets des exercices avec ce symbole vont (brièvement) réapparaître dans le cours ou les exercices. Néanmoins ces concepts devraient déjà être connus (et donc ces exercices aussi résolus maintenant).

Partie I : Algèbre.

Pour réviser cette partie (si nécessaire), voir le fichier <http://www.stewartcalculus.com/data/default/upfiles/AlgebraReview.pdf>.

1. Calculer, sans calculatrice, chacune des expressions suivantes.

$$a) (-3)^4 \quad b) -3^4 \quad c) 3^{-4} \quad d) \frac{5^{23}}{5^{21}} \quad e) \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \quad f) 16^{-3/4}$$

2. Simplifier chaque expression. Ecrire la réponse sans exposants négatifs.

$$a) \sqrt{200} - \sqrt{32} \quad b) (3a^3b^3)(4ab^2)^2 \quad c) \left(\frac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$$

3. Développer et simplifier.

$$a) 3(x+6) + 4(2x-5) \quad b) (x+3)(4x-5) \quad c) (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$d) (2x+3)^2 \quad e) (x+2)^3 \quad f) (a^{4/3} - a^{2/3} + 1)(a^{2/3} + 1)$$

4. Factoriser chaque expression.

$$a) 4x^2 - 25 \quad b) 2x^2 + 5x - 12 \quad c) x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

$$d) x^2 + 27x \quad e) 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} \quad f) x^3y - 4xy$$

5. Simplifier l’expression rationnelle.

$$a) \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2} \quad b) \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \cdot \frac{x + 3}{2x + 1} \quad c) \frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{x + 1}{x + 2} \quad d) \frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}$$

6. Rendre le dénominateur rationnel et simplifier.

$$a) \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2} \quad b) \frac{h}{\sqrt{9+h} + 3}$$

7. Simplifier les expressions, où $a, b > 0$ et $p, q \in \mathbb{R}^*$.

$$a) (ab)^p b^{q-p} \quad b) a^{p-q} (ab)^q \quad c) \frac{a^p}{b^{-q}} \quad d) \frac{b^q}{a^{-p}} \quad e) \left(ab^{\frac{q}{p}}\right)^p$$

$$f) \left(a^{\frac{p}{q}}b\right)^q \quad g) \left(a^{\frac{1}{q}}b^{\frac{1}{p}}\right)^{pq} \quad h) \sqrt{a^{2p}} b^q \quad i) \left(\left(\frac{1}{a}\right)^q + \left(\frac{1}{b}\right)^p\right) \frac{a^p(ab)^q}{1 + \frac{a^q}{b^p}}$$

$$j) a^q b^p \frac{\frac{a^p + b^q}{\left(\frac{1}{a}\right)^p + \left(\frac{1}{b}\right)^q}}{\frac{a^q + b^p}{\left(\frac{1}{b}\right)^p + \left(\frac{1}{a}\right)^q}} \quad k) a^{p-q} b^{q-p} (a^q + b^p) \left(\left(\frac{1}{a}\right)^q + \left(\frac{1}{b}\right)^p \right)^{-1} \quad l) a^q b^p \left(\left(a^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \right)^p \right)^q$$

$$m) \left(\sqrt{a^p (b^q + a^{-p})} - 1 \right) \left(\sqrt{b^q (a^p + b^{-q})} + 1 \right)$$

8. Compléter le carré.

$$a) x^2 + x + 1 \quad b) 2x^2 - 12x + 11$$

9. Résoudre l'équation. (Chercher seulement les solutions réelles.)

$$a) x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x \quad b) \frac{2x}{x+1} = \frac{2x-1}{x} \quad c) x^2 - x - 12 = 0$$

$$d) 2x^2 + 4x + 1 = 0 \quad e) x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad f) 3|x-4| = 10$$

$$g) 2x(4-x)^{-1/2} - 3\sqrt{4-x} = 0$$

10. ♦ Résoudre chaque inégalité. Ecrire les réponses sous forme d'intervalles.

$$a) -4 < 5 - 3x \leq 17 \quad b) x^2 < 2x + 8 \quad c) x(x-1)(x+2) > 0$$

$$d) |x-4| < 3 \quad e) \frac{2x-3}{x+1} \leq 1$$

11. Ces équations sont-elles vraies ou fausses ? Pour chaque équation, le domaine des variables est supposé tel que tout soit bien défini.

$$a) (p+q)^2 = p^2 + q^2 \quad b) \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad c) \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$$

$$d) \frac{1+TC}{C} = 1 + T \quad e) (bc+1)\frac{a}{b} = \frac{(bc+1)ad}{bd} \quad f) \frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

$$g) \frac{\frac{1}{x}}{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}} = \frac{1}{a-b} \quad h) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

12. Vérifier les identités.

$$a) 3^{2(n+1)+4} - 2^{n+1} = 9(3^{2n+4} - 2^n) + 7 \cdot 2^n, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

$$b) \left(\sum_{k=0}^7 a^k \right) (1-a) = (1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)$$

13. Soient $b > 0$ et $m \in \mathbb{Z}$. Simplifier l'expression $A = \left(-b(-b^{-2})^m \right)^{-2m}$. Déterminer m pour que A soit égal à 16^5 lorsque $b = 2$.

Partie II : Trigonométrie.

1. Convertir de degrés en radians.

$$a) 300^\circ \quad b) -18^\circ$$

2. Convertir de radians en degrés.

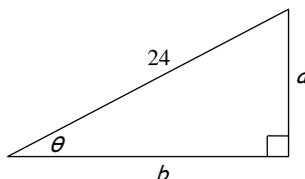
$$a) \frac{5\pi}{6} \quad b) 2$$

3. Calculer la longueur de l'arc d'un cercle de 12 cm de rayon sous-tendu par un angle au centre de 30° .

4. Quelles sont les valeurs exactes ?

a) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ b) $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ c) $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

5. Exprimer les longueurs a et b de la figure ci-dessous en termes de θ .



6. Calculer $\sin(x + y)$ sachant que $\sin(x) = \frac{1}{3}$, $\cos(y) = \frac{4}{5}$ et que x et y sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

7. Démontrer ces identités en supposant que tout soit bien défini.

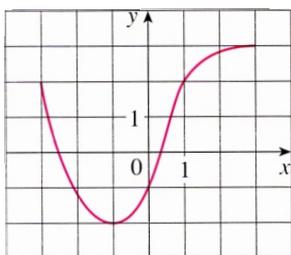
a) $\tan(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$ b) $\frac{2\tan(x)}{1 + \tan(x)^2} = \sin(2x)$

8. Chercher toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 2π telles que $\sin(2x) = \sin(x)$.

9. Dessiner le graphe de la fonction $y = 1 + \sin(2x)$ sans faire usage de la calculatrice.

Partie III : Fonctions réelles.

1. La figure ci-dessous montre le graphe d'une fonction f .



- a) Quelle est la valeur $f(-1)$?
 b) Que vaut $f(2)$?
 c) Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = 2$?
 d) Chercher les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.
 e) Déterminer le domaine de définition et l'ensemble image de f .

2. Pour $f(x) = x^3$, calculer le quotient différentiel $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ et le simplifier.

3. Déterminer le domaine de définition de la fonction.

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$ b) $g(x) = \frac{x^{1/3}}{x^2+1}$ c) $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

4. ♦ Par quelles transformations du graphe de f obtient-on les graphes des fonctions suivantes ?

a) $y = -f(x)$ b) $y = 2f(x) - 1$ c) $y = f(x - 3) + 2$

5. Esquisser à la main et sans l'aide d'une calculatrice les graphes suivants.

a) $y = x^3$ b) $y = (x+1)^3$ c) $y = (x-2)^3 + 3$ d) $y = 4 - x^2$
 e) $y = \sqrt{x}$ f) $y = 2\sqrt{x}$ g) $y = -2^x$ h) $y = 1 + x^{-1}$

6. ♦ Soit $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

- a) Calculer $f(-2)$ et $f(1)$. b) Dessiner le graphe de f .

7. ♦ Soient $f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = 2x - 3$. Déterminer les fonctions suivantes.

a) $f \circ g$

b) $g \circ f$

c) $g \circ g \circ g$

8. Soit $a, b > 0$ et $p, q \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\exp(p \operatorname{Log}(a) + q \operatorname{Log}(b))$

b) $\exp(p(\operatorname{Log}(a) - \operatorname{Log}(b)) + \operatorname{Log}(b)(p+q))$

c) $\exp(p \operatorname{Log}(ab^{-1}) + \operatorname{Log}(b^{p+q}))$

d) $\exp(q \operatorname{Log}\left(\frac{b}{a}\right) + \operatorname{Log}(a^q) + p \operatorname{Log}(a))$

9. ♦ Pour chaque fonction f définie sur l'intervalle I , trouver le domaine de définition de la fonction réciproque f^{-1} et dessiner les graphes de f et f^{-1} .

N.B. : Tous les domaines I sont choisis en sorte que la fonction réciproque existe.

a) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$

c) $f(x) = \tan(x)$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

d) $f(x) = e^x$ sur $I = \mathbb{R}$

e) $f(x) = e^{-x}$ sur $I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = a^x$ avec $a = \frac{1}{2}$ sur $I = \mathbb{R}$

Rappel : La fonction réciproque d'une fonction bijective $f: X \rightarrow Y$ fait correspondre à tout élément y de Y l'unique élément x de X qui est solution de l'équation $f(x) = y$. On a donc $f^{-1}(y) = x$.