

Cours Euler: Série 7

30 septembre 2026

Exercice 1

Fais l'exercice suivant. Les « notations convenues » de la donnée sont les notations ensemblistes.

1. **Exercice.** Abréger les phrases suivantes à l'aide des notations convenues:

- a) La figure **F** contient l'intersection des figures **A** et **B**.
- b) L'intersection des figures **F** et **F'** est contenue dans la réunion des figures **A** et **B**.
- c) Les deux points **M** et **N** appartiennent à l'intersection des figures **F** et **F'**.
- d) Les droites **a** et **b** se coupent en un point de la figure **F**.

On fera un croquis dans chaque cas.

2. **Exercice.** Traduire les relations suivantes en langage courant:

- a) $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$
- c) $\{\mathbf{A}\} \cup \mathbf{B} \supset \mathbf{C} \cap \mathbf{F}$
- b) $\mathbf{P} \in \mathbf{F} \cap \mathbf{F}'$
- d) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} \subset \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$

On fera un croquis dans chaque cas.

Exercice 2

- 1) On considère un ensemble à trois éléments $\{A, B, C\}$. On appelle ses éléments points. On appelle droites les sous-ensembles suivants : $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$. Vérifie que cette donnée respecte les axiomes de connexion.
- 2) Même question pour l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$ avec pour droites tous les sous-ensembles à deux éléments.
- 3) On considère l'ensemble de points $\{A, B, C\}$ et l'ensemble des droites $\{\{A, B\}, \{B, C\}\}$. Lesquels des axiomes de connexion ne sont pas vérifiés et pourquoi?
- 4) Même question si on n'a qu'une seule droite $\{A, B, C\}$.
- 5) **Plan de Fano.** On considère l'ensemble de sept points $\{A, B, C, O, E, F, G\}$ et les sept droites $\{A, G, B\}, \{A, F, C\}, \{B, E, C\}, \{A, O, E\}, \{B, O, F\}, \{C, O, G\}$ et $\{E, F, G\}$. Dessine cette géométrie de sorte à pouvoir montrer qu'elle vérifie les axiomes de connexion.

Exercice 3

Dans une donnée apparaît le nom de « crapoïde ». C'est ainsi que l'auteur a baptisé des animaux imaginaires qui vivraient en deux dimensions.

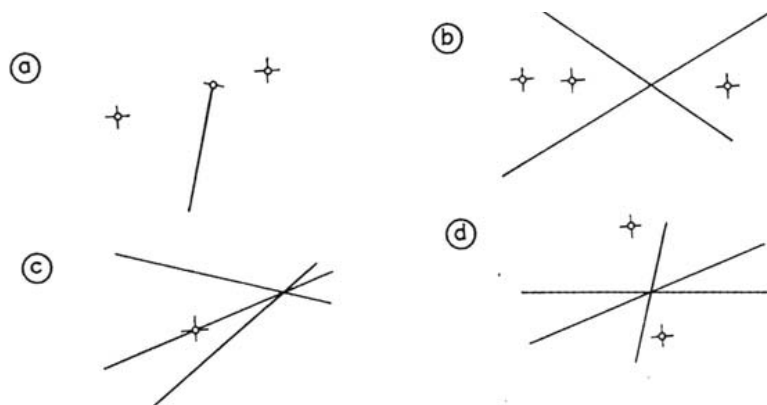
8. **Calcul.** Combien quatre droites distinctes ont-elles au plus de points de rencontre, lorsqu'on les prend deux par deux ?
Passer ensuite au cas de 5 droites, puis 6, 7 et enfin n droites.
9. **Calcul.** Combien quatre points déterminent-ils de droites, au plus, lorsqu'on les prend deux par deux ?
Passer ensuite au cas de 5 points, puis 6, 7 et enfin n points.
10. **Calcul.** Combien quatre droites déterminent-elles au plus de triangles ?
Passer ensuite au cas de 5, puis 6 droites.
11. **Exercice.** On donne deux segments dans le plan. Décrire ce que peut être leur intersection, dans tous les cas possibles.
12. **Exercice.** On donne deux demi-droites distinctes dans le plan. Décrire ce que peut être leur intersection, dans tous les cas possibles.
13. **Problème.** On donne un segment AB et un point P . Nous admettrons que le segment AB est « opaque » : cela signifie que si un crapoïde est en un point M , il ne « voit » pas le point P lorsque le segment MP coupe le segment AB .
Trouver l'ensemble des points du plan d'où les crapoïdes ne voient pas P .
14. **Problème.** On donne un segment opaque AB (voir problème 13) et deux points C et D situés du même côté de la droite AB .
a) Trouver l'ensemble des points du plan d'où les crapoïdes ne voient ni C ni D .
b) Trouver l'ensemble des points du plan d'où les crapoïdes voient à la fois C et D .
15. **Problème.** On donne deux segments opaques AB et CD (voir problème 13) ainsi qu'un point P n'appartenant ni à la droite AB ni à la droite CD . Trouver l'ensemble des points du plan d'où les crapoïdes ne voient pas P .

Exercice 4

Pour se détendre un peu ? On considère quatre points dans le plan. Combien de droites doit-on tracer au minimum pour séparer les quatre points, c'est-à-dire pour faire en sorte que deux points arbitraires (parmi ces quatre) sont toujours séparés par une droite au moins ? Et pour cinq points ? Et six ? et sept ? Et... huit ? Et on s'arrêtera ici pour cette semaine.

Exercice 5

Décris le plus précisément possible les figures suivantes en n'utilisant que le langage introduit au cours (en particulier on n'a pas introduit la notion d'angle pour l'instant).



Exercice 6

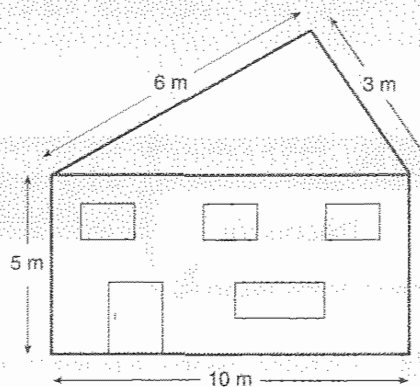
A faire sur la donnée.

- 2** Monsieur Dubois veut faire construire sa maison. L'architecte consulté lui propose le plan suivant de la façade :

- a) Crois-tu qu'un entrepreneur sera capable de réaliser une telle maison ?

Pourquoi ?

- b) Si tu réponds non, tente de corriger l'une ou l'autre mesure donnée dans ce plan pour que l'entrepreneur puisse effectuer la construction.



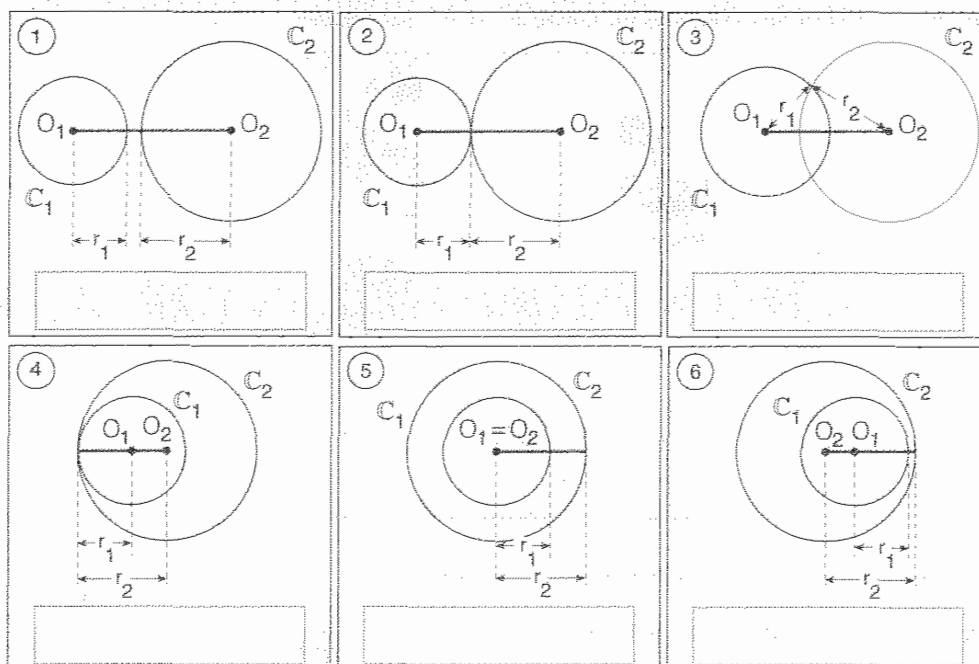
- 3** Voici six positions de deux cercles C_1 et C_2 .

On te demande, dans chaque cas, de comparer $\overline{O_1O_2}$, la **distance entre leurs centres**,

à la **somme** de leurs rayons respectifs r_1 et r_2 (pour les dessins ① et ②),

à leur **différence** (pour les dessins ④, ⑤ et ⑥),

à leur **somme** et à leur **différence** (pour le dessin ③).



Exercice 7

A faire sur la donnée.

- 4** Le bourgmestre de ma commune a décidé d'ériger sur la place deux lampadaires A_1 et A_2 .

Construis les points qui recevront le **même éclairage** de A_1 et de A_2 en suivant le procédé suivant :

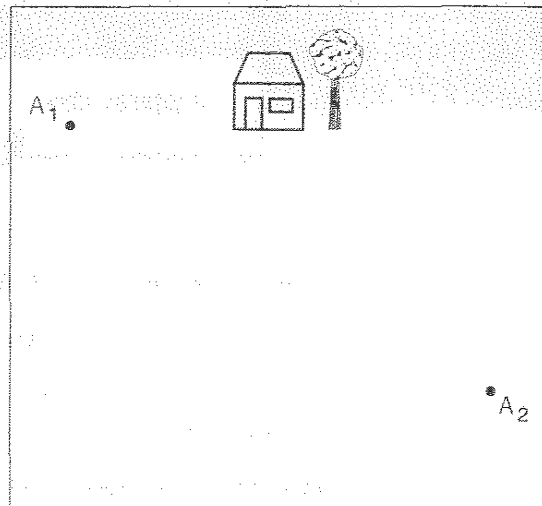
- a) Trace le cercle C_1 de centre A_1 et le cercle C_2 de centre A_2 , de même rayon, de telle manière qu'ils se coupent.

Note en rouge les points d'intersection de C_1 et C_2 .

- b) Recommence plusieurs fois cette construction avec des rayons de plus en plus grands.

- c) Relie les points rouges obtenus.

- Quelle figure as-tu dessinée ?
- Nomme-la !
- Compare les distances d'un point M de cette figure à A_1 et à A_2
- Crois-tu que cette propriété soit vérifiée pour chaque point de la figure dessinée ?



- 5 a)** Trois villas V_1 , V_2 et V_3 sont construites dans un lotissement. Les trois propriétaires doivent payer le raccordement à une borne électrique commune. On décide de la placer en un endroit qui doit se trouver à **égale distance** des trois villas.

- Est-ce réalisable ?

Si oui, recherche (à l'aide du compas et de la latte) cet emplacement idéal que tu noteras P .

- Explique ta construction.

.....

.....

- Pourquoi le point P trouvé répond-il au problème posé ?

.....

.....

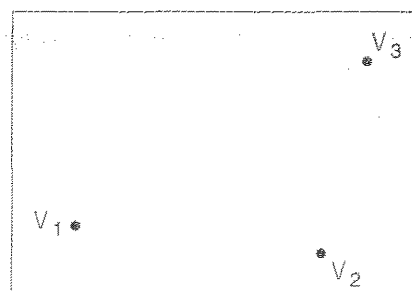
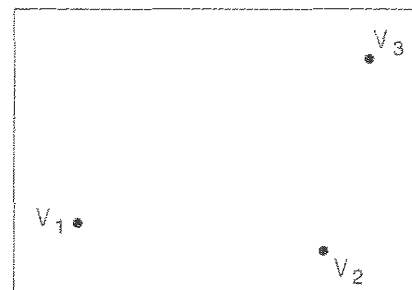
- b)** Un quatrième propriétaire voudrait construire une villa dans le même lotissement.

En quel endroit, faut-il lui conseiller de la construire pour que, lui aussi, soit à la même distance de la borne que les trois autres ?

.....

.....

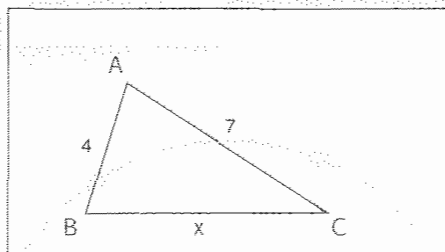
Construis l'ensemble des emplacements où la villa V_4 pourrait être construite. Pourquoi ces emplacements répondent-ils au problème posé ?



Exercice 8

A faire sur la donnée.

209 Observe le triangle suivant :



Wapiti - école et matériel 2017

a) Complète les inégalités triangulaires et traduis-les en utilisant les données.

1.	$\overline{AB} < \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
2.	$\overline{AC} < \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
3.	$\overline{BC} < \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$

Ce sont des inéquations

b) La première de ces inégalités est toujours vraie, quelle que soit la valeur de x .

Pourquoi ? $\dots\dots\dots$

c) Pour la deuxième inégalité, quelle condition doit remplir x ? (Attention : x peut être un nombre décimal ...)

$x \dots\dots\dots$

d) Quelle condition doit remplir x pour la troisième inégalité ?

$x \dots\dots\dots$

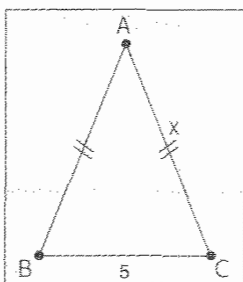
e) En résumé, pour ce triangle, la valeur de x est comprise entre $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$

Exprime cela en écriture symbolique : $\dots\dots\dots < x < \dots\dots\dots$

f) Représente ces valeurs (en vert) sur la droite graduée que voici :



210 Observe le triangle isocèle ABC :



a) Complète les inégalités triangulaires et traduis-les en utilisant les données.

1.	$\overline{AB} < \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
2.	$\overline{AC} < \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
3.	$\overline{BC} < \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$

Exercice 9

A faire sur la donnée.

1. Inégalité triangulaire

- a) Alicia, petite fille de quatre ans, essaie vainement de construire un triangle avec trois bouts de bois dont les longueurs sont 24 cm, 26 cm et 50 cm. Va-t-elle y parvenir ?

Pourquoi ?

- b) Et dans les cas suivants, la construction est-elle réalisable ?

Justifie tes réponses.

1. 12 cm ; 45 cm ; 25 cm :

2. 23 cm ; 33 cm ; 43 cm :

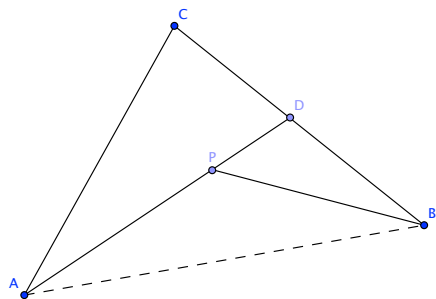
3. 95 mm ; 8 cm ; 0,7 m :

4. 0,36 m ; 230 mm ; 15 cm :

Exercice 10

Démontre le théorème suivant à l'aide des axiomes vus en cours. On considère trois points non alignés A, B, C , un point D sur le segment ouvert $]BC[$ et un point P sur le segment ouvert $]AD[$. Alors

$$\overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AC} + \overline{CB}.$$



Exercice 11

6. Quelle allure?

a) Trace un segment RS de 8 cm.

Trace un arc de cercle c de centre R et de rayon 5 cm.

Trace un arc de cercle d de centre S et de rayon 5 cm.

Ces deux arcs de cercle se coupent en M et N .

Trace d'une couleur le quadrilatère $RMSN$.

Trace d'une autre couleur les segments RS et MN qui se coupent en O .

Quelle est la longueur du segment MO ?

Observe la figure $RMSN$ et décris ses propriétés.

b) Trace un cercle $c(O; 4 \text{ cm})$ et place un point M sur le cercle c .

Trace un cercle $d(M; 4 \text{ cm})$.

Le point O appartient-il au cercle d ? Peux-tu le justifier?

N et P sont les points d'intersection des cercles c et d . ►

► Trace les cercles $e(N; 4 \text{ cm})$ et $f(P; 4 \text{ cm})$.

Le cercle f coupe le cercle d en L et le cercle c en R .

Trace les segments NR , RL et LN .

Observe la figure NLR et décris ses propriétés.

c) Trace un cercle $c(O; 8 \text{ cm})$ et dessine un diamètre AD , quelconque.

Sur AD , construis quatre segments isométriques: AB , BO , OC et CD .

Construis trois perpendiculaires au diamètre AD , qui passent respectivement par B , O et C .

Ces trois perpendiculaires coupent le cercle c en six points.

Avec A et D , tu disposes maintenant de huit points sur le cercle. Relie-les, dans l'ordre.

Quel est le nom du polygone inscrit obtenu?



Exercice 12

Cet exercice est un avant-goût du Théorème de Thalès que nous verrons à la fin de l'année ! Pour le moment il nous sert à comprendre et exécuter une marche-à-suivre.

8. Bien sous tous rapports

Pour partager un segment AB en sept segments isométriques, on procède de la manière suivante :

- tracer une demi-droite Ax qui ne contient pas le segment AB ;
- sur Ax , reporter un segment de longueur quelconque AA_1 ;
- sur Ax , reporter un segment A_1A_2 , de même longueur que le segment AA_1 ;
- sur Ax , reporter un segment A_2A_3 , de même longueur que le segment AA_1 ;
- procéder de même, encore quatre fois, jusqu'à obtenir un segment A_6A_7 ;
- tracer le segment A_7B ;
- tracer une parallèle à A_7B par le point A_6 qui coupe le segment AB en B_6 ;
- tracer une parallèle à A_7B par le point A_5 qui coupe le segment AB en B_5 ;
- procéder de même par les points A_4 , A_3 , A_2 et A_1 pour obtenir successivement les points B_4 , B_3 , B_2 et B_1 .



Saurais-tu appliquer la même méthode pour partager un segment PQ de 9,5 cm en 11 parties isométriques ?

Remarque : Les exercices suivants sont des exercices de révision pour le test à venir. Ils ne feront pas l'objet d'un corrigé et ne seront pas corrigés.

Exercice 13 (Optionnel)

Exercice de test : Théorie : les nombres rationnels.

- 1) Donne la définition de l'équivalence de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.
- 2) Donne un exemple de deux fractions équivalentes (mais non égales).
- 3) Utilise la définition ci-dessus pour vérifier si les deux fractions $\frac{9}{80}$ et $\frac{10}{89}$ sont équivalentes. Si ce n'est pas le cas, laquelle est la plus grande des deux ?

Exercice 14 (Optionnel)**Exercice de test : On calcule dans $\mathbb{Q}$.**

Simplifie les fractions suivantes pour les mettre sous forme irréductible (p et q sont des nombres premiers distincts > 15) :

- 1) $\frac{540}{999}$
- 2) $\frac{1'000'000}{355}$
- 3) $\frac{77 \cdot p \cdot q^2}{33 \cdot p^3 \cdot q}$

Exercice 15 (Optionnel)**Exercice de test : Ecriture décimale et fractions.** On demande dans cet exercice de donner tous les calculs qui conduisent au résultat.

- 1) Transforme la fraction $\frac{49}{280}$ en écriture décimale.
- 2) Transforme la fraction $\frac{40}{37}$ en écriture décimale. Quelle est la longueur de la période ?
- 3) Quelle fraction irréductible correspond au nombre 0,512 ? Effectue les calculs nécessaires et explique ton raisonnement.
- 4) Quelle fraction irréductible correspond au nombre $0,\overline{123}$? Effectue les calculs nécessaires et explique ton raisonnement.

Exercice 16 (Optionnel)**Exercice de test : Théorie : les nombres rationnels.**

- 1) Définis la somme de deux nombres rationnels représentés par des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.
- 2) Démontre que la somme dans $\mathbb{Q}$ est commutative, i.e. si $r, s \in \mathbb{Q}$, alors $r + s = s + r$. Indique si (et où) tu utilises la commutativité de la somme dans $\mathbb{Z}$ et la commutativité du produit dans $\mathbb{Z}$.
- 3) Soit m un nombre entier non nul. Calcule $\left(\frac{7}{m} + \frac{m}{7}\right)^{-1}$ en fonction de m .
- 4) Détermine l'ensemble de tous les nombres rationnels r qui vérifient $\frac{1}{r} \leq \frac{2}{5}$. Trouve d'abord le nombre rationnel r qui vérifie $\frac{1}{r} = \frac{2}{5}$ puis résous l'inéquation en tenant compte du signe de r (positif ou négatif). Vérifie ton résultat pour t'assurer de la justesse de ta réponse !

Exercice 17 (Optionnel)**Exercice de test : On calcule dans $\mathbb{Q}$.**

Effectue les calculs suivants en indiquant les étapes intermédiaires et donne la réponse sous forme de fraction irréductible :

1) $\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{44}{99} \cdot \left(-\frac{25}{35} \right) - \frac{13}{14} \cdot \frac{10}{39} \right) : \frac{7}{15} \right] =$

2) Lequel de ces deux nombres est le plus grand, $8,\bar{3}$ ou $\frac{331}{40}$? Explique ton raisonnement !