Cours Euler: Série 7

1er octobre 2025

Exercice 1

Fais l'exercice suivant. Les « notations convenues » de la donnée sont les notations ensemblistes.

1. **Exercice.** Abréger les phrases suivantes à l'aide des notations convenues:
   a) La figure **F** contient l'intersection des figures **A** et **B**.
   b) L'intersection des figures **F** et **F′** est contenue dans la réunion des figures **A** et **B**.
   c) Les deux points **M** et **N** appartiennent à l'intersection des figures **F** et **F′**.
   d) Les droites **a** et **b** se coupent en un point de la figure **F**.
   On fera un croquis dans chaque cas.

2. **Exercice.** Traduire les relations suivantes en langage courant:
   a) $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ c) $\{\mathbf{A}\} \cup \mathbf{B} \supset \mathbf{C} \cap \mathbf{F}$
   b) $\mathbf{P} \in \mathbf{F} \cap \mathbf{F'}$ d) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} \subset \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
   On fera un croquis dans chaque cas.

Exercice 2

1) On considère un ensemble à trois éléments $\{A, B, C\}$. On appelle ses éléments points. On appelle droites les sous-ensembles suivants : $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$. Vérifie que cette donnée respecte les axiomes de connexion.

2) Même question pour l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$ avec pour droites tous les sous-ensembles à deux éléments.

3) On considère l'ensemble de points $\{A, B, C\}$ et l'ensemble des droites $\{\{A, B\}, \{B, C\}\}$. Lesquels des axiomes de connexion ne sont pas vérifiés et pourquoi ?

4) Même question si on n'a qu'une seule droite $\{A, B, C\}$.

5) **Plan de Fano.** On considère l'ensemble de sept points $\{A, B, C, O, E, F, G\}$ et les sept droites $\{A, G, B\}, \{A, F, C\}, \{B, E, C\}, \{A, O, E\}, \{B, O, F\}, \{C, O, G\}$ et $\{E, F, G\}$. Dessine cette géométrie de sorte à pouvoir montrer qu'elle vérifie les axiomes de connexion.

Exercice 3

Dans une donnée apparaît le nom de « crapoïde ». C'est ainsi que l'auteur a baptisé des animaux imaginaires qui vivraient en deux dimensions.

8. **Calcul.** Combien quatre droites distinctes ont-elles au plus de points de rencontre, lorsqu'on les prend deux par deux ?
   Passer ensuite au cas de 5 droites, puis 6, 7 et enfin n droites.

9. **Calcul.** Combien quatre points déterminent-ils de droites, au plus, lorsqu'on les prend deux par deux ?
   Passer ensuite au cas de 5 points, puis 6, 7 et enfin n points.

10. **Calcul.** Combien quatre droites déterminent-elles au plus de triangles ?
    Passer ensuite au cas de 5, puis 6 droites.

11. **Exercice.** On donne deux segments dans le plan. Décrire ce que peut être leur intersection, dans tous les cas possibles.

12. **Exercice.** On donne deux demi-droites distinctes dans le plan. Décrire ce que peut être leur intersection, dans tous les cas possibles.

13. **Problème.** On donne un segment **AB** et un point **P**. Nous admettrons que le segment **AB** est « opaque »: cela signifie que si un crapoïde est en un point **M**, il ne « voit » pas le point **P** lorsque le segment **MP** coupe le segment **AB**.
    Trouver l'ensemble des points du plan d'où les crapoïdes ne voient pas **P**.

14. **Problème.** On donne un segment opaque **AB** (voir problème 13) et deux points **C** et **D** situés du même côté de la droite **AB**.
    a) Trouver l'ensemble des points du plan d'où les crapoïdes ne voient ni **C** ni **D**.
    b) Trouver l'ensemble des points du plan d'où les crapoïdes voient à la fois **C** et **D**.

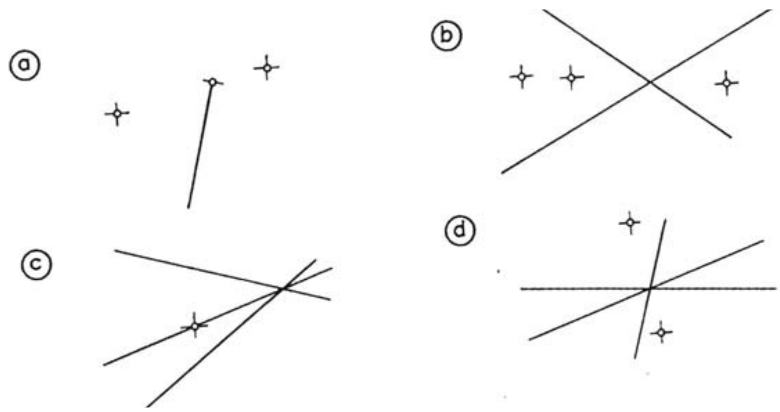
15. **Problème.** On donne deux segments opaques **AB** et **CD** (voir problème 13) ainsi qu'un point **P** n'appartenant ni à la droite **AB** ni à la droite **CD**. Trouver l'ensemble des points du plan d'où les crapoïdes ne voient pas **P**.

Exercice 4

Pour se détendre un peu ? On considère quatre points dans le plan. Combien de droites doit-on tracer au minimum pour séparer les quatre points, c'est-à-dire pour faire en sorte que deux points arbitraires (parmi ces quatre) sont toujours séparés par une droite au moins ? Et pour cinq points ? Et six ? et sept ? Et... huit ? Et on s'arrêtera ici pour cette semaine.

Exercice 5

Décris le plus précisément possible les figures suivantes en n'utilisant que le langage introduit au cours (en particulier on n'a pas introduit la notion d'angle pour l'instant).



Exercice 6

A faire sur la donnée.

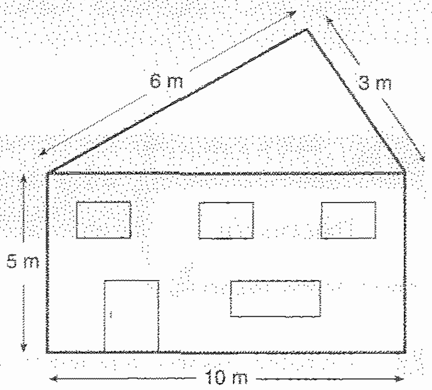
2 Monsieur Dubois veut faire construire sa maison. L'architecte consulté lui propose le plan suivant de la façade :

a) Crois-tu qu'un entrepreneur sera capable de réaliser une telle maison ? ....

Pourquoi ? ....

b) Si tu réponds non, tente de corriger l'une ou l'autre mesure donnée dans ce plan pour que l'entrepreneur puisse effectuer la construction.

....



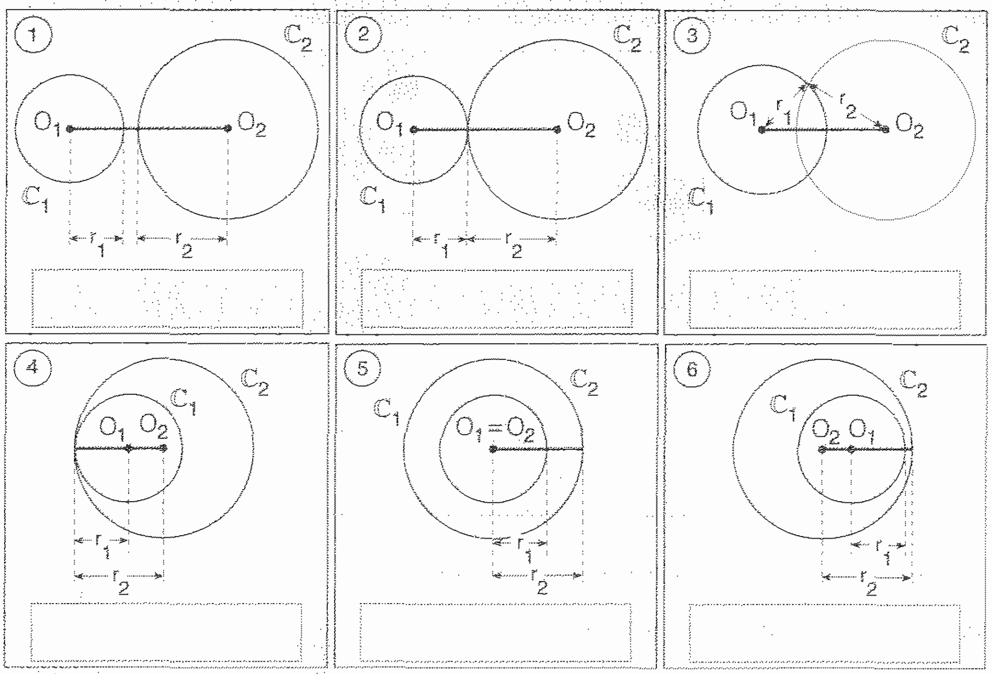
3 Voici six positions de deux cercles $\mathbb{C}_1$ et $\mathbb{C}_2$.

On te demande, dans chaque cas, de comparer $\overline{O_1O_2}$, **la distance entre leurs centres**,

à la **somme** de leurs rayons respectifs r_1 et r_2 (pour les dessins ① et ②),

à leur **différence** (pour les dessins ④, ⑤ et ⑥),

à leur **somme** et à leur **différence** (pour le dessin ③).

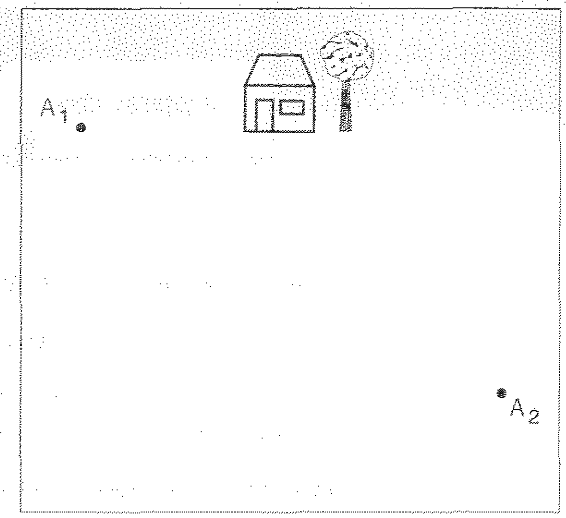


Exercice 7

A faire sur la donnée.

4 Le bourgmestre de ma commune a décidé d'ériger sur la place deux lampadaires A_1 et A_2.

Construis les points qui recevront le **même éclairage** de A_1 et de A_2 en suivant le procédé suivant :



a) Trace le cercle $\mathbb{C}_1$ de centre A_1 et le cercle $\mathbb{C}_2$ de centre A_2, de même rayon, de telle manière qu'ils se coupent.

Note en rouge les points d'intersection de $\mathbb{C}_1$ et $\mathbb{C}_2$.

b) Recommence plusieurs fois cette construction avec des rayons de plus en plus grands.

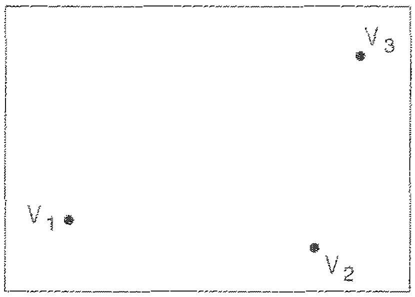
c) Relie les points rouges obtenus.

- Quelle figure as-tu dessinée ? ....
- Nomme-la ! ....
- Compare les distances d'un point M de cette figure à A_1 et à A_2. ....
- Crois-tu que cette propriété soit vérifiée pour chaque point de la figure dessinée ? ....

5 a) Trois villas V_1, V_2 et V_3 sont construites dans un lotissement. Les trois propriétaires doivent payer le raccordement à une borne électrique commune. On décide de la placer en un endroit qui doit se trouver à **égale distance** des trois villas.

- Est-ce réalisable ? ....

  Si oui, recherche (à l'aide du compas et de la latte) cet emplacement idéal que tu noteras P.



- Explique ta construction.

  ....

  ....

- Pourquoi le point P trouvé répond-il au problème posé ?

  ....

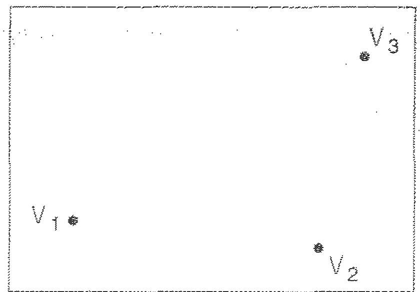
  ....

b) Un quatrième propriétaire voudrait construire une villa dans le même lotissement.

En quel endroit, faut-il lui conseiller de la construire pour que, lui aussi, soit à la même distance de la borne que les trois autres ?

....

....

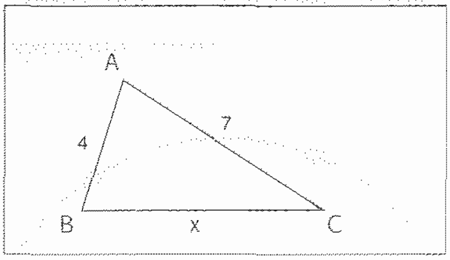


Construis l'ensemble des emplacements où la villa V_4 pourrait être construite. Pourquoi ces emplacements répondent-ils au problème posé ?

Exercice 8

A faire sur la donnée.

209 Observe le triangle suivant :



a) Complète les inégalités triangulaires et traduis-les en utilisant les données.

1.	$\overline{AB}$ <	....
2.	$\overline{AC}$ <	....
3.	$\overline{BC}$ <	....

Ce sont des inéquations

b) La première de ces inégalités est toujours vraie, quelle que soit la valeur de x.
Pourquoi ? ....

c) Pour la deuxième inégalité, quelle condition doit remplir x ? (Attention : x peut être un nombre décimal ...)

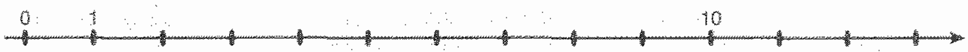
x ....

d) Quelle condition doit remplir x pour la troisième inégalité ?

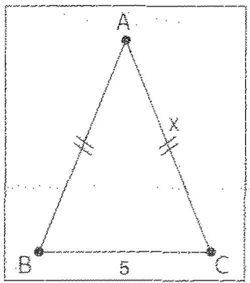
x ....

e) En résumé, pour ce triangle, la valeur de x est comprise entre .... et ....
Exprime cela en écriture symbolique : .... < x < ....

f) Représente ces valeurs (en vert) sur la droite graduée que voici :



210 Observe le triangle isocèle ABC :



a) Complète les inégalités triangulaires et traduis-les en utilisant les données.

1.	$\overline{AB}$ <	
2.	$\overline{AC}$ <	
3.	$\overline{BC}$ <	

Exercice 9

A faire sur la donnée.

1. Inégalité triangulaire

a) Alicia, petite fille de quatre ans, essaie vainement de construire un triangle avec trois bouts de bois dont les longueurs sont 24 cm, 26 cm et 50 cm. Va-t-elle y parvenir ? ....

Pourquoi ? ....

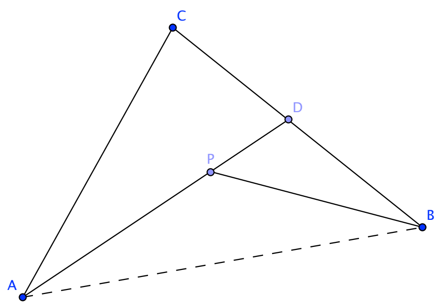
b) Et dans les cas suivants, la construction est-elle réalisable ?

Justifie tes réponses.

1. 12 cm ; 45 cm ; 25 cm : ....
2. 23 cm ; 33 cm ; 43 cm : ....
3. 95 mm ; 8 cm ; 0,7 m : ....
4. 0,36 m ; 230 mm ; 15 cm : ....

Exercice 10

Démontre le théorème suivant à l'aide des axiomes vus en cours. On considère trois points non alignés A, B, C, un point D sur le segment ouvert $]BC[$ et un point P sur le segment ouvert $]AD[$. Alors



$$\overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Exercice 11

6. Quelle allure?

a) Trace un segment RS de 8 cm.

Trace un arc de cercle c de centre R et de rayon 5 cm.

Trace un arc de cercle d de centre S et de rayon 5 cm.

Ces deux arcs de cercle se coupent en M et N.

Trace d'une couleur le quadrilatère $RMSN$.

Trace d'une autre couleur les segments RS et MN qui se coupent en O.

Quelle est la longueur du segment MO?

Observe la figure $RMSN$ et décris ses propriétés.

b) Trace un cercle $c(O\,;\,4\text{ cm})$ et place un point M sur le cercle c.

Trace un cercle $d(M\,;\,4\text{ cm})$.

Le point O appartient-il au cercle d ? Peux-tu le justifier?

N et P sont les points d'intersection des cercles c et d. ►

► Trace les cercles $e(N\,;\,4\text{ cm})$ et $f(P\,;\,4\text{ cm})$.

Le cercle f coupe le cercle d en L et le cercle c en R.

Trace les segments NR, RL et LN.

Observe la figure NLR et décris ses propriétés.

c) Trace un cercle $c(O\,;\,8\text{ cm})$ et dessine un diamètre AD, quelconque.

Sur AD, construis quatre segments isométriques: AB, BO, OC et CD.

Construis trois perpendiculaires au diamètre AD, qui passent respectivement par B, O et C.

Ces trois perpendiculaires coupent le cercle c en six points.

Avec A et D, tu disposes maintenant de huit points sur le cercle. Relie-les, dans l'ordre.

Quel est le nom du polygone inscrit obtenu?

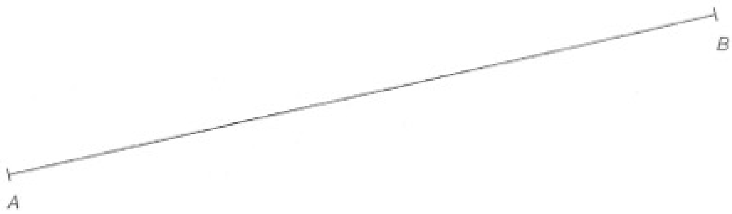
Exercice 12

Cet exercice est un avant-goût du Théorème de Thalès que nous verrons à la fin de l'année ! Pour le moment il nous sert à comprendre et exécuter une marche-à-suivre.

8. Bien sous tous rapports

Pour partager un segment AB en sept segments isométriques, on procède de la manière suivante :

- tracer une demi-droite Ax qui ne contient pas le segment AB ;
- sur Ax, reporter un segment de longueur quelconque AA_1 ;
- sur Ax, reporter un segment A_1A_2, de même longueur que le segment AA_1 ;
- sur Ax, reporter un segment A_2A_3, de même longueur que le segment AA_1 ;
- procéder de même, encore quatre fois, jusqu'à obtenir un segment A_6A_7 ;
- tracer le segment A_7B ;
- tracer une parallèle à A_7B par le point A_6 qui coupe le segment AB en B_6 ;
- tracer une parallèle à A_7B par le point A_5 qui coupe le segment AB en B_5 ;
- procéder de même par les points A_4, A_3, A_2 et A_1 pour obtenir successivement les points B_4, B_3, B_2 et B_1.



Saurais-tu appliquer la même méthode pour partager un segment PQ de 9,5 cm en 11 parties isométriques ?

Exercice 13 (Optionnel)

Exercice de test : Théorie : les nombres rationnels.

1) Donne la définition de l'équivalence de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

2) Donne un exemple de deux fractions équivalentes (mais non égales).

3) Utilise la définition ci-dessus pour vérifier si les deux fractions $\frac{9}{80}$ et $\frac{10}{89}$ sont équivalentes. Si ce n'est pas le cas, laquelle est la plus grande des deux ?

Exercice 14 (Optionnel)

Exercice de test : On calcule dans $\mathbb{Q}$.
Simplifie les fractions suivantes pour les mettre sous forme irréductible (p et q sont des nombres premiers distincts > 15) :

1) $\dfrac{540}{999}$

2) $\dfrac{1'000'000}{355}$

3) $\dfrac{77 \cdot p \cdot q^2}{33 \cdot p^3 \cdot q}$

Exercice 15 (Optionnel)

Exercice de test : Ecriture décimale et fractions. On demande dans cet exercice de donner tous les calculs qui conduisent au résultat.

1) Transforme la fraction $\dfrac{49}{280}$ en écriture décimale.

2) Transforme la fraction $\dfrac{40}{37}$ en écriture décimale. Quelle est la longueur de la période ?

3) Quelle fraction irréductible correspond au nombre $0{,}512$? Effectue les calculs nécessaires et explique ton raisonnement.

4) Quelle fraction irréductible correspond au nombre $0{,}\overline{123}$? Effectue les calculs nécessaires et explique ton raisonnement.

Exercice 16 (Optionnel)

Exercice de test : Théorie : les nombres rationnels.

1) Définis la somme de deux nombres rationnels représentés par des fractions $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$.

2) Démontre que la somme dans $\mathbb{Q}$ est commutative, i.e. si $r, s \in \mathbb{Q}$, alors $r + s = s + r$. Indique si (et où) tu utilises la commutativité de la somme dans $\mathbb{Z}$ et la commutativité du produit dans $\mathbb{Z}$.

3) Soit m un nombre entier non nul. Calcule $\left(\dfrac{7}{m} + \dfrac{m}{7}\right)^{-1}$ en fonction de m.

4) Détermine l'ensemble de tous les nombres rationnels r qui vérifient $\dfrac{1}{r} \leq \dfrac{2}{5}$. Trouve d'abord le nombre rationnel r qui vérifie $\dfrac{1}{r} = \dfrac{2}{5}$ puis résous l'inéquation en tenant compte du signe de r (positif ou négatif). Vérifie ton résultat pour t'assurer de la justesse de ta réponse !

Exercice 17 (Optionnel)

Exercice de test : On calcule dans $\mathbb{Q}$.
Effectue les calculs suivants en indiquant les étapes intermédiaires et donne la réponse sous forme de fraction irréductible :

1) $\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{44}{99} \cdot \left(-\frac{25}{35} \right) - \frac{13}{14} \cdot \frac{10}{39} \right) : \frac{7}{15} \right] =$

2) Lequel de ces deux nombres est le plus grand, $8{,}\bar{3}$ ou $\frac{331}{40}$? Explique ton raisonnement !