

# Cours Euler: Série 7

2 octobre 2024

## Exercice 1

Fais l'exercice suivant. Les « notations convenues » de la donnée sont les notations ensemblistes.

1. **Exercice.** Abréger les phrases suivantes à l'aide des notations convenues:

- La figure  $\mathbf{F}$  contient l'intersection des figures  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ .
- L'intersection des figures  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{F}'$  est contenue dans la réunion des figures  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ .
- Les deux points  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  appartiennent à l'intersection des figures  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{F}'$ .
- Les droites  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  se coupent en un point de la figure  $\mathbf{F}$ .

On fera un croquis dans chaque cas.

2. **Exercice.** Traduire les relations suivantes en langage courant:

- $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$
- $\mathbf{P} \in \mathbf{F} \cap \mathbf{F}'$
- $\{\mathbf{A}\} \cup \mathbf{B} \supset \mathbf{C} \cap \mathbf{F}$
- $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} \subset \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$

On fera un croquis dans chaque cas.

## Exercice 2

- On considère un ensemble à trois éléments  $\{A, B, C\}$ . On appelle ses éléments points. On appelle droites les sous-ensembles suivants :  $\{A, B\}$ ,  $\{A, C\}$ ,  $\{B, C\}$ . Vérifie que cette donnée respecte les axiomes de connexion.
- Même question pour l'ensemble  $\{A, B, C, D, E\}$  avec pour droites tous les sous-ensembles à deux éléments.
- On considère l'ensemble de points  $\{A, B, C\}$  et l'ensemble des droites  $\{\{A, B\}, \{B, C\}\}$ . Lesquels des axiomes de connexion ne sont pas vérifiés et pourquoi?
- Même question si on n'a qu'une seule droite  $\{A, B, C\}$ .
- Plan de Fano.** On considère l'ensemble de sept points  $\{A, B, C, O, E, F, G\}$  et les sept droites  $\{A, G, B\}$ ,  $\{A, F, C\}$ ,  $\{B, E, C\}$ ,  $\{A, O, E\}$ ,  $\{B, O, F\}$ ,  $\{C, O, G\}$  et  $\{E, F, G\}$ . Dessine cette géométrie de sorte à pouvoir montrer qu'elle vérifie les axiomes de connexion.

## Exercice 3

Dans une donnée apparaît le nom de « crapoïde ». C'est ainsi que l'auteur a baptisé des animaux imaginaires qui vivraient en deux dimensions.

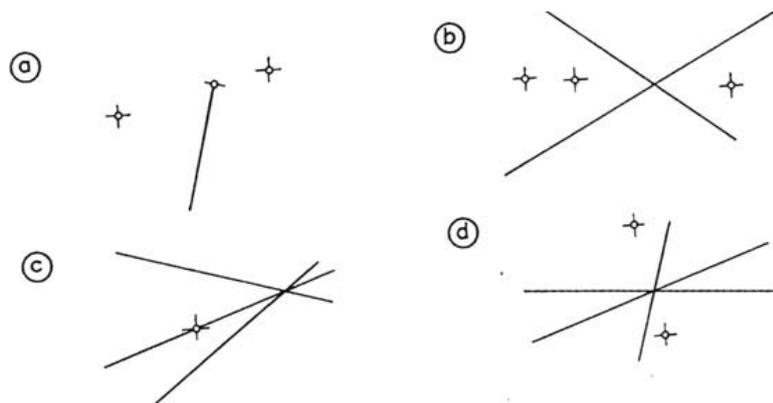
8. **Calcul.** Combien quatre droites distinctes ont-elles au plus de points de rencontre, lorsqu'on les prend deux par deux ?  
Passer ensuite au cas de 5 droites, puis 6, 7 et enfin  $n$  droites.
9. **Calcul.** Combien quatre points déterminent-ils de droites, au plus, lorsqu'on les prend deux par deux ?  
Passer ensuite au cas de 5 points, puis 6, 7 et enfin  $n$  points.
10. **Calcul.** Combien quatre droites déterminent-elles au plus de triangles ?  
Passer ensuite au cas de 5, puis 6 droites.
11. **Exercice.** On donne deux segments dans le plan. Décrire ce que peut être leur intersection, dans tous les cas possibles.
12. **Exercice.** On donne deux demi-droites distinctes dans le plan. Décrire ce que peut être leur intersection, dans tous les cas possibles.
13. **Problème.** On donne un segment  $AB$  et un point  $P$ . Nous admettrons que le segment  $AB$  est « opaque » : cela signifie que si un crapoïde est en un point  $M$ , il ne « voit » pas le point  $P$  lorsque le segment  $MP$  coupe le segment  $AB$ .  
Trouver l'ensemble des points du plan d'où les crapoïdes ne voient pas  $P$ .
14. **Problème.** On donne un segment opaque  $AB$  (voir problème 13) et deux points  $C$  et  $D$  situés du même côté de la droite  $AB$ .  
a) Trouver l'ensemble des points du plan d'où les crapoïdes ne voient ni  $C$  ni  $D$ .  
b) Trouver l'ensemble des points du plan d'où les crapoïdes voient à la fois  $C$  et  $D$ .
15. **Problème.** On donne deux segments opaques  $AB$  et  $CD$  (voir problème 13) ainsi qu'un point  $P$  n'appartenant ni à la droite  $AB$  ni à la droite  $CD$ . Trouver l'ensemble des points du plan d'où les crapoïdes ne voient pas  $P$ .

## Exercice 4

**Pour se détendre un peu ?** On considère quatre points dans le plan. Combien de droites doit-on tracer au minimum pour séparer les quatre points, c'est-à-dire pour faire en sorte que deux points arbitraires (parmi ces quatre) sont toujours séparés par une droite au moins ? Et pour cinq points ? Et six ? et sept ? Et... huit ? Et on s'arrêtera ici pour cette semaine.

## Exercice 5

Décris le plus précisément possible les figures suivantes en n'utilisant que le langage introduit au cours (en particulier on n'a pas introduit la notion d'angle pour l'instant).



### Exercice 6

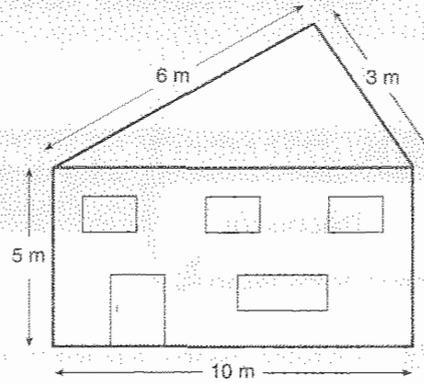
A faire sur la donnée.

**2** Monsieur Dubois veut faire construire sa maison. L'architecte consulté lui propose le plan suivant de la façade :

a) Crois-tu qu'un entrepreneur sera capable de réaliser une telle maison ?

Pourquoi ?

b) Si tu réponds non, tente de corriger l'une ou l'autre mesure donnée dans ce plan pour que l'entrepreneur puisse effectuer la construction.



**3** Voici six positions de deux cercles  $C_1$  et  $C_2$ .

On te demande, dans chaque cas, de comparer  $\overline{O_1O_2}$ , la **distance entre leurs centres**,

à la **somme** de leurs rayons respectifs  $r_1$  et  $r_2$  (pour les dessins ① et ②),

à leur **différence** (pour les dessins ④, ⑤ et ⑥),

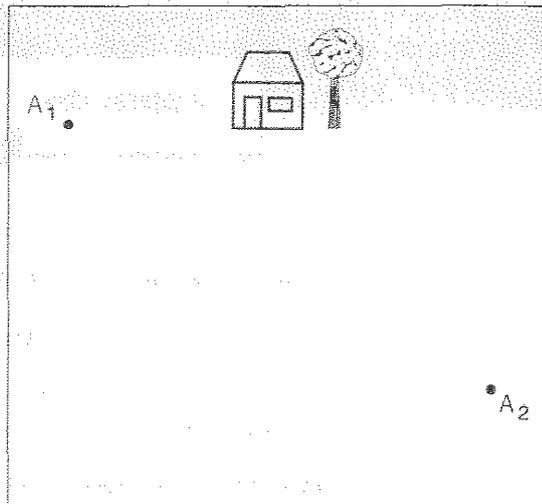
à leur **somme** et à leur **différence** (pour le dessin ③).

<p>①</p>	<p>②</p>	<p>③</p>
<p>④</p>	<p>⑤</p>	<p>⑥</p>

### Exercice 7

A faire sur la donnée.

**4** Le bourgmestre de ma commune a décidé d'ériger sur la place deux lampadaires  $A_1$  et  $A_2$ .  
 Construis les points qui recevront le **même éclairage** de  $A_1$  et de  $A_2$  en suivant le procédé suivant :



a) Trace le cercle  $C_1$  de centre  $A_1$  et le cercle  $C_2$  de centre  $A_2$ , de même rayon, de telle manière qu'ils se coupent.

Note en rouge les points d'intersection de  $C_1$  et  $C_2$ .

b) Recommence plusieurs fois cette construction avec des rayons de plus en plus grands.

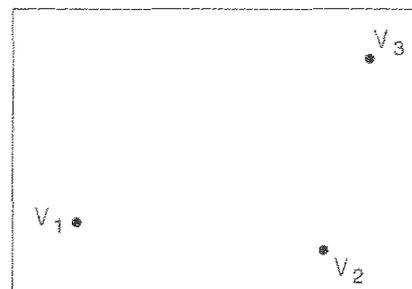
c) Relie les points rouges obtenus.

- Quelle figure as-tu dessinée ? .....
- Nomme-la ! .....
- Compare les distances d'un point M de cette figure à  $A_1$  et à  $A_2$ . .....
- Crois-tu que cette propriété soit vérifiée pour chaque point de la figure dessinée ? .....

**5 a)** Trois villas  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  sont construites dans un lotissement. Les trois propriétaires doivent payer le raccordement à une borne électrique commune. On décide de la placer en un endroit qui doit se trouver à **égale distance** des trois villas.

• Est-ce réalisable ? .....

Si oui, recherche (à l'aide du compas et de la latte) cet emplacement idéal que tu noteras P.

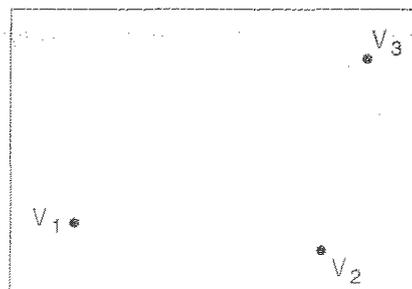


• Explique ta construction. ....

• Pourquoi le point P trouvé répond-il au problème posé ? .....

**b)** Un quatrième propriétaire voudrait construire une villa dans le même lotissement.

En quel endroit, faut-il lui conseiller de la construire pour que, lui aussi, soit à la même distance de la borne que les trois autres ?

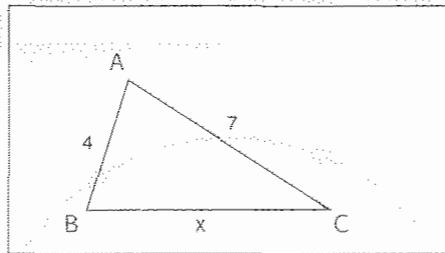


Construis l'ensemble des emplacements où la villa  $V_4$  pourrait être construite. Pourquoi ces emplacements répondent-ils au problème posé ?

**Exercice 8**

A faire sur la donnée.

**209** Observe le triangle suivant :



a) Complète les inégalités triangulaires et traduis-les en utilisant les données.

1.	$\overline{AB} < \dots$	
2.	$\overline{AC} < \dots$	
3.	$\overline{BC} < \dots$	

**Info**  
Ce sont des inéquations

b) La première de ces inégalités est toujours vraie, quelle que soit la valeur de x.

Pourquoi ?

c) Pour la deuxième inégalité, quelle condition doit remplir x ? (Attention : x peut être un nombre décimal ...)

x

d) Quelle condition doit remplir x pour la troisième inégalité ?

x

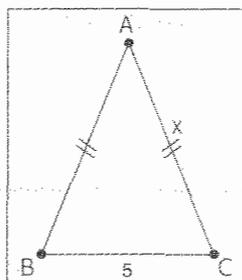
e) En résumé, pour ce triangle, la valeur de x est comprise entre et

Exprime cela en écriture symbolique :  $\dots < x < \dots$

f) Représente ces valeurs (en vert) sur la droite graduée que voici :



**210** Observe le triangle isocèle ABC :



a) Complète les inégalités triangulaires et traduis-les en utilisant les données.

1.	$\overline{AB} < \dots$	
2.	$\overline{AC} < \dots$	
3.	$\overline{BC} < \dots$	

**Exercice 9**

A faire sur la donnée.

**1. Inégalité triangulaire**

a) Alicia, petite fille de quatre ans, essaie vainement de construire un triangle avec trois bouts de bois dont les longueurs sont 24 cm, 26 cm et 50 cm. Va-t-elle y parvenir ? .....

Pourquoi ? .....

b) Et dans les cas suivants, la construction est-elle réalisable ?

Justifie tes réponses.

1. 12 cm ; 45 cm ; 25 cm : .....

2. 23 cm ; 33 cm ; 43 cm : .....

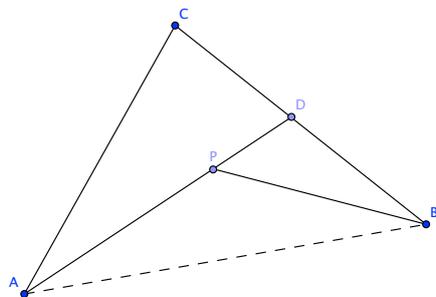
3. 95 mm ; 8 cm ; 0,7 m : .....

4. 0,36 m ; 230 mm ; 15 cm : .....

**Exercice 10**

Démontre le théorème suivant à l'aide des axiomes vus en cours. On considère trois points non alignés  $A, B, C$ , un point  $D$  sur le segment ouvert  $]BC[$  et un point  $P$  sur le segment ouvert  $]AD[$ . Alors

$$\overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AC} + \overline{CB}.$$



## Exercice 11

## 6. Quelle allure?

a) Trace un segment  $RS$  de 8 cm.

Trace un arc de cercle  $c$  de centre  $R$  et de rayon 5 cm.

Trace un arc de cercle  $d$  de centre  $S$  et de rayon 5 cm.

Ces deux arcs de cercle se coupent en  $M$  et  $N$ .

Trace d'une couleur le quadrilatère  $RMSN$ .

Trace d'une autre couleur les segments  $RS$  et  $MN$  qui se coupent en  $O$ .

Quelle est la longueur du segment  $MO$ ?

Observe la figure  $RMSN$  et décris ses propriétés.

b) Trace un cercle  $c(O; 4 \text{ cm})$  et place un point  $M$  sur le cercle  $c$ .

Trace un cercle  $d(M; 4 \text{ cm})$ .

Le point  $O$  appartient-il au cercle  $d$ ? Peux-tu le justifier?

$N$  et  $P$  sont les points d'intersection des cercles  $c$  et  $d$ . ►

► Trace les cercles  $e(N; 4 \text{ cm})$  et  $f(P; 4 \text{ cm})$ .

Le cercle  $f$  coupe le cercle  $d$  en  $L$  et le cercle  $c$  en  $R$ .

Trace les segments  $NR$ ,  $RL$  et  $LN$ .

Observe la figure  $NLR$  et décris ses propriétés.

c) Trace un cercle  $c(O; 8 \text{ cm})$  et dessine un diamètre  $AD$ , quelconque.

Sur  $AD$ , construis quatre segments isométriques:  $AB$ ,  $BO$ ,  $OC$  et  $CD$ .

Construis trois perpendiculaires au diamètre  $AD$ , qui passent respectivement par  $B$ ,  $O$  et  $C$ .

Ces trois perpendiculaires coupent le cercle  $c$  en six points.

Avec  $A$  et  $D$ , tu disposes maintenant de huit points sur le cercle. Relie-les, dans l'ordre.

Quel est le nom du polygone inscrit obtenu?



**Exercice 12**

Cet exercice est un avant-goût du Théorème de Thalès que nous verrons à la fin de l'année! Pour le moment il nous sert à comprendre et exécuter une marche-à-suivre.

**8. Bien sous tous rapports**

Pour partager un segment  $AB$  en sept segments isométriques, on procède de la manière suivante:

- tracer une demi-droite  $Ax$  qui ne contient pas le segment  $AB$ ;
- sur  $Ax$ , reporter un segment de longueur quelconque  $AA_1$ ;
- sur  $Ax$ , reporter un segment  $A_1A_2$ , de même longueur que le segment  $AA_1$ ;
- sur  $Ax$ , reporter un segment  $A_2A_3$ , de même longueur que le segment  $AA_1$ ;
- procéder de même, encore quatre fois, jusqu'à obtenir un segment  $A_6A_7$ ;
- tracer le segment  $A_7B$ ;
- tracer une parallèle à  $A_7B$  par le point  $A_6$  qui coupe le segment  $AB$  en  $B_6$ ;
- tracer une parallèle à  $A_7B$  par le point  $A_5$  qui coupe le segment  $AB$  en  $B_5$ ;
- procéder de même par les points  $A_4$ ,  $A_3$ ,  $A_2$  et  $A_1$  pour obtenir successivement les points  $B_4$ ,  $B_3$ ,  $B_2$  et  $B_1$ .



Saurais-tu appliquer la même méthode pour partager un segment  $PQ$  de 9,5 cm en 11 parties isométriques?

**Exercice 13 (Optionnel)****Exercice de test : Théorie : les nombres rationnels.**

- 1) Donne la définition de l'équivalence de deux fractions  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$ .
- 2) Donne un exemple de deux fractions équivalentes (mais non égales).
- 3) Utilise la définition ci-dessus pour vérifier si les deux fractions  $\frac{9}{80}$  et  $\frac{10}{89}$  sont équivalentes. Si ce n'est pas le cas, laquelle est la plus grande des deux?

**Exercice 14 (Optionnel)****Exercice de test : On calcule dans  $\mathbb{Q}$ .**

Simplifie les fractions suivantes pour les mettre sous forme irréductible ( $p$  et  $q$  sont des nombres premiers distincts  $> 15$ ) :

- 1)  $\frac{540}{999}$
- 2)  $\frac{1'000'000}{355}$
- 3)  $\frac{77 \cdot p \cdot q^2}{33 \cdot p^3 \cdot q}$

**Exercice 15 (Optionnel)****Test 2016 : Ecriture décimale et fractions.** On demande dans cet exercice de donner tous les calculs qui conduisent au résultat.

- 1) Transforme la fraction  $\frac{49}{280}$  en écriture décimale.
- 2) Transforme la fraction  $\frac{40}{37}$  en écriture décimale. Quelle est la longueur de la période ?
- 3) Quelle fraction irréductible correspond au nombre 0,512 ? Effectue les calculs nécessaires et explique ton raisonnement.
- 4) Quelle fraction irréductible correspond au nombre  $0,\overline{123}$  ? Effectue les calculs nécessaires et explique ton raisonnement.

**Exercice 16 (Optionnel)****Test 2016 : Théorie : les nombres rationnels.**

- 1) Définis la somme de deux nombres rationnels représentés par des fractions  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$ .
- 2) Démontre que la somme dans  $\mathbb{Q}$  est commutative, i.e. si  $r, s \in \mathbb{Q}$ , alors  $r + s = s + r$ . Indique si (et où) tu utilises la commutativité de la somme dans  $\mathbb{Z}$  et la commutativité du produit dans  $\mathbb{Z}$ .
- 3) Soit  $m$  un nombre entier non nul. Calcule  $\left(\frac{7}{m} + \frac{m}{7}\right)^{-1}$  en fonction de  $m$ .
- 4) Détermine l'ensemble de tous les nombres rationnels  $r$  qui vérifient  $\frac{1}{r} \leq \frac{2}{5}$ . Trouve d'abord le nombre rationnel  $r$  qui vérifie  $\frac{1}{r} = \frac{2}{5}$  puis résous l'inéquation en tenant compte du signe de  $r$  (positif ou négatif). Vérifie ton résultat pour t'assurer de la justesse de ta réponse !

**Exercice 17 (Optionnel)****Test 2016 : On calcule dans  $\mathbb{Q}$ .**

Effectue les calculs suivants en indiquant les étapes intermédiaires et donne la réponse sous forme de fraction irréductible :

1)  $\frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{44}{99} \cdot \left( -\frac{25}{35} \right) - \frac{13}{14} \cdot \frac{10}{39} \right) : \frac{7}{15} \right] =$

2) Lequel de ces deux nombres est le plus grand,  $8,\bar{3}$  ou  $\frac{331}{40}$  ? Explique ton raisonnement !