Cours Euler: Corrigé 6

27 septembre 2023

Exercice 1

(a) $\dfrac{16}{25} = \dfrac{64}{100} = 64\ \% = 0,64$

(b) $\dfrac{8}{400} = \dfrac{1}{50} = \dfrac{2}{100} = 2\ \% = 0,02$

(c) $\dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{100} = 25\% = 0,25$

(d) $\dfrac{1}{20} = \dfrac{5}{100} = 5\% = 0,05$

(e) $\dfrac{1}{6}$ = Impossible de l'exprimer avec une puissance de 10 au dénominateur car la fraction est irréductible et son dénominateur contient un facteur 3.

(f) $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{50}{100} = 50\% = 0,5$

(g) $\dfrac{12}{75} = \dfrac{4}{25} = \dfrac{16}{100} = 16\% = 0,16$

(h) $-\dfrac{11}{55} = -\dfrac{1}{5} = -\dfrac{20}{100} = -20\% = -0,2$

(i) $\dfrac{49}{28} = \dfrac{7}{4} = \dfrac{175}{100} = 175\% = 1,75$

(j) Donnons un cas de pourmille : $\dfrac{1}{40} = \dfrac{25}{1000} = 25^0/_{00}$

Exercice 2

a) 8 francs b) $55,7$ francs c) $8,2$ cm

Exercice 3

Les opposés sont $0,03$, -1, $-\dfrac{27}{4}$ et $-a$, pour toute valeur de $a \in \mathbb{Q}$.

Les inverses sont $(-0,03)^{-1} = \left(\dfrac{-3}{100}\right)^{-1} = -\dfrac{100}{3}$, $1^{-1} = 1$, $\left(\dfrac{27}{4}\right)^{-1} = \dfrac{4}{27}$ et a^{-1} n'existe que si $a \neq 0$. Dans ce cas on l'écrit parfois $\dfrac{1}{a}$.

Exercice 4

a) $0,8 \cdot 30 = 24$ g

b) $75 : 4 = 18,75$ km

c) $1,25 \cdot 4,6 = 5,75$ fr

d) $5 \cdot 4 \cdot 30 = 600$ fr

e) $4,5 \cdot 2,3 = 10,35$ kg

f) $1,75 - 0,16 = 1,59$ m

Exercice 5

a) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$

b) $\frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{9} = 3 \cdot 0,\bar{1} = 0,\bar{3}$ et $\frac{1}{9} = 0,\bar{1}$.

c) $\frac{25}{5} = 5$ par simplification

d) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{375}{1000} = 0,375$

e) $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = 0,\bar{6}$

f) $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8$

g) $\frac{5}{9} = 5 \cdot \frac{1}{9} = 5 \cdot 0,\bar{1} = 0,\bar{5}$

h) $\frac{7}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = 2,\bar{3}$

i) $\frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$ par division euclidienne

j) $\frac{18}{6} = 3$ par simplification

k) $\frac{7}{12} = 0,58\bar{3}$ par division euclidienne

l) $\frac{3}{125} = \frac{3}{5^3} = \frac{3 \cdot 2^3}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{24}{1000} = 0,024$

m) $\frac{24}{320} = \frac{3}{40} = \frac{75}{1000} = 0,075$

n) $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$ par division euclidienne

o) $\frac{36}{48} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75$

p) $\frac{13}{12} = 1,08\bar{3}$ par division euclidienne

Les fractions avec un 7 au dénominateur sont, sauf quand elles ont un multiple de 7 au numérateur, des nombres périodiques dont la période est formée des chiffres 1, 4, 2, 8, 5, 7 permutés.

$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots = 0,\overline{142857}$

$\frac{2}{7} = 0{,}285714285714\ldots = 0,\overline{285714}$

$\frac{3}{7} = 0{,}428571428571\ldots = 0,\overline{428571}$

$\frac{4}{7} = 0{,}571428571428\ldots = 0,\overline{571428}$

$\frac{5}{7} = 0{,}714285714285\ldots = 0,\overline{714285}$

$\frac{6}{7} = 0{,}857142857142\ldots = 0,\overline{857142}$

$\frac{7}{7} = 1$

$\frac{8}{7} = 1{,}142857142857\ldots = 1,\overline{142857} = 1 + \frac{1}{7}$

$\frac{9}{7} = 1{,}285714285714\ldots = 1,\overline{285714} = 1 + \frac{2}{7}$

$\frac{10}{7} = 1{,}428571428571\ldots = 1,\overline{428571} = 1 + \frac{3}{7}$

Exercice 6

a) $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

b) $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

c) $0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$

d) $0,07 = \frac{7}{100}$

e) $2,1 = \frac{21}{10}$

f) $3,45 = \frac{345}{100} = \frac{69}{20}$

g) $5,22 = \frac{522}{100} = \frac{261}{50}$

h) $0,\bar{7} = 7 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$

i) $0,\overline{55} = 0,\bar{5} = \frac{5}{9}$

j) $1,1\bar{4} = \frac{11}{10} + \frac{4}{90} = \frac{103}{90}$

k) La méthode usuelle donne, avec $n = 2,00\overline{35}$

$$10000 \cdot n - 100 \cdot n = 9900 \cdot n = 19835 \Rightarrow 2,00\overline{35} = \frac{19835}{9900} = \frac{19835}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11} = \frac{3967}{1980}.$$

l) De même, avec $n = 0,12\overline{345}$

$$100000 \cdot n - 100 \cdot n = 99900 \cdot n = 12345,\overline{345} - 12,\overline{345} = 12333 \Rightarrow 0,12\overline{345} = \frac{12333}{99900} = \frac{4111}{33300}.$$

Exercice 7

On constate que $\frac{5}{7} = \frac{20}{28} < \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$ et que $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} < \frac{2}{7}$. Gilles a donc été meilleur dans chacune des deux mi-temps. Pourtant, si on considère le total des tirs, Gilles a réussi 5 tirs sur 11 et Hervé 6 tirs sur 11. Incroyable, c'est Hervé le meilleur sur l'ensemble du match !

Exercice 8

a) $10^2 = 10^5 \cdot 10^{-3}$. Il faut donc additionner $10^5 = 100'000$ fois 10^{-3}.

b) $10^3 = 1000$

c) Puisque $50 = \frac{1}{2} \cdot 100$, on peut mettre 200 fois 50 g dans 10 kilogramme.

d) 10^8

e) 500 fois. En effet $5 \cdot 100 = \frac{10^3}{2}$

Exercice 9

On calcule par distributivité que

$$9 \cdot 7,\overline{9} = 10 \cdot 7,\overline{9} - 7,\overline{9} = 79,\overline{9} - 7,\overline{9} = 72.$$

Par conséquent $7,\overline{9} = \frac{72}{9} = 8$.

Exercice 10 (Optionnel)

174.

a) 43 + (999 · 43) = 43'000

b) 2,5 · 17,4 · 4 = 174

c) 2,5 : 0,2 = 12,5

d) 42,42 + 17,55 − 2,42 = 57,55

e) (88 · 3,14) + (12 · 3,14) = 314

f) (6 · 1,3) − (3 · 1,3) − (3 · 1,3) = 0

g) 12,25 + 9,5 − 12,25 = 9,5

h) (2,2 · 0,8) − (0,2 · 0,8) = 1,6

i) $0,2^2 : 0,2^2$ = 1

j) (15 : 0,5) · 0,5 = 15

Exercice 11 (Optionnel)

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{5}{8} + \frac{6}{5} = \frac{25}{40} + \frac{42}{40} = \frac{67}{40}$

c) $1,2 + \frac{3}{10} = \frac{12}{10} + \frac{3}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

d) $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{12}{15} + \frac{10}{15} = \frac{22}{15}$

e) $\frac{4}{9} - \frac{5}{12} = \frac{16}{36} - \frac{15}{36} = \frac{1}{36}$

f) $\frac{6}{100} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{80} = \frac{3}{40}$

g) $\frac{11}{6} - \frac{3}{4} = \frac{22}{12} - \frac{9}{12} = \frac{13}{12}$

h) $\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$

i) $\frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{9}{16} - \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$

j) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

k) $\frac{3}{7} \div \frac{7}{6} = \frac{3}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{18}{49}$

l) $\frac{3^2}{10} + 0,1 = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 1$

m) $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{6}$

n) $\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{6}{4} + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$

o) $4 - \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{16}{4} - \frac{7}{4} + \frac{2}{4} = \frac{11}{4}$

p) $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$

q) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{1}{6}$

r) $6 \cdot \frac{5}{3} = 2 \cdot 5 = 10$

s) $\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

t) $0,25 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$

u) $\frac{12}{\frac{8}{5}} = 12 \div \frac{8}{5} = 12 \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{2}$

v) $\frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{5} = -\frac{2}{5}$

w) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

x) $\frac{3}{2} \div 0,\overline{3} = \frac{3}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$

Exercice 12 (Optionnel)

Le retour du Sophiste.

Etape	**Temps**
$n = 0$	0 s
$n = 1$	10 s
$n = 2$	$10 + 1$ s $= 11$ s
$n = 3$	$10 + 1 + \frac{1}{10}$ s $=$ 11,1 s
$n = 4$	$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$ s $=$ 11,11 s
$n = 5$	$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ s $=$ 11,111 s
n	$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-2}} = 11,\underbrace{1\ldots1}_{n-2 \text{ fois}}$ s

Position d'Achille	**Position de la tortue**
0 m	100 m
100 m	$100 + 10$ m $= 110$ m
$100 + 10$ m $= 110$ m	$100 + 10 + 1$ m $= 111$ m
$100 + 10 + 1$ m $= 111$ m	$100+10+1+\frac{1}{10}$ m =111,1 m
$100+10+1+\frac{1}{10}$ m $=$ 111,1 m	$100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$ m $=$ 111,11 m
$100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$ m $=$ 111,11 m	$100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ m $=$ 111,111 m
$100+10+1+\dfrac{1}{10}+\ldots+\dfrac{1}{10^{n-3}} = 111,\underbrace{1\ldots1}_{n-3 \text{ fois}}$ m	$100+10+1+\dfrac{1}{10}+\ldots+\dfrac{1}{10^{n-2}} = 111,\underbrace{1\ldots1}_{n-2 \text{ fois}}$ m

A l'étape n, la distance entre Achille et la tortue vaut

$$\frac{1}{10^{n-2}} = 0,\underbrace{00\ldots0}_{n-3 \text{ fois}}1 \text{ m}.$$

Achille ne peut donc pas rattraper la tortue en un nombre fini d'étapes. Cependant, ces étapes sont chaque fois 10 fois plus courtes en temps et en distance. Il s'avère que, bien qu'il faille un nombre infini d'étapes, le temps total pour les effectuer toutes est fini (comme le montre bien l'expérience !). Le temps total vaut :

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots = 11,\overline{1} \text{ s} = 11+\frac{1}{9} \text{ s}.$$

A ce temps-là, les positions d'Achille et de la tortue coïncident et valent :

$$100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots = 111,\overline{1} \text{ m}.$$

La tortue a le temps de faire $11,\overline{1}$ m avant qu'Achille la rattrape. L'erreur de Zénon était de faire l'hypothèse qu'une somme infinie de termes (ici la somme des temps de chaque étape) doit forcément avoir une valeur infinie. Toute la difficulté mathématique de cette question réside en fait dans la démonstration que la somme infinie $10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots$ a une valeur finie. C'est le même problème que de montrer que l'écriture décimale des nombres rationnels ayant un dénominateur qui n'est pas un diviseur d'une puissance de 10 existe. Cette démonstration est au programme de 1ère année universitaire en mathématique et date du 19e siècle.

Note qu'il ne suffit pas que les termes de la somme infinie soient de plus en plus petit. En effet, on peut montrer que la somme infinie $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$ a une valeur infinie (diverge).