Cours Euler: Série 6

25 septembre 2024

Exercice 1

Transforme les fractions suivantes en fractions équivalentes avec une puissance de 10 au dénominateur (la plus petite possible). Puis écris la fraction sous forme de % (ou pour mille), puis en écriture décimale.
Exemple :

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\% = 0,75.$$

1) $\frac{16}{25} =$

2) $\frac{8}{400} =$

3) $\frac{1}{4} =$

4) $\frac{1}{20} =$

5) $\frac{1}{6} =$

6) $\frac{3}{6} =$

7) $\frac{12}{75} =$

8) $-\frac{11}{55} =$

9) $\frac{49}{28} =$

10) $\frac{1}{40} =$

Exercice 2

Effectue une opération dans $\mathbb{Q}$ pour trouver la bonne réponse dans chaque cas.

183.

Arriveras-tu à trouver la bonne réponse sans calculatrice ni calculs écrits ?

a)	J'achète 2,5 kg de pommes à Fr. 3.20 le kilo. Combien vais-je payer ?	Fr. 6.–	Fr. 6.40	Fr. 12.–	Fr. 8.–
b)	Tu achètes deux bandes dessinées pour Fr. 24.50 et trois livres de poche pour Fr. 19.80. Tu paies avec un billet de Fr. 100.–. Combien te rend-on ?	Fr. 45.70	Fr. 44.30	Fr. 57.50	Fr. 55.70
c)	L'aire d'un carré est 67,24 cm^2. Quelle est la longueur de son côté ?	8,2 cm	7,8 cm	9,2 cm	10,8 cm

Exercice 3

Calcule l'opposé et l'inverse de $-0,03$, de 1, de $\frac{27}{4}$ et de $a \in \mathbb{Q}$.

Exercice 4

Effectue une opération dans $\mathbb{Q}$ pour trouver la bonne réponse dans chaque cas.

182.

a) Un litre d'eau de mer contient 30 g de sel. Quelle quantité de sel contient 0,8 l d'eau de mer ?

b) Un coureur s'entraîne au rythme de 4 min/km. Quelle distance parcourt-il en une heure et quart de course ?

c) J'achète 1,25 kg de raisin à Fr. 4.60 le kilo. Quelle est ma dépense ?

d) Gérard veut changer la moquette de sa chambre, qui mesure 3,50 m sur 4,20 m. La moquette revient à Fr. 30.–/m^2. Elle est vendue « au mètre », à partir d'un rouleau de 5 m de large. Quelle est sa dépense, s'il veut la poser en un seul morceau ?

e) Quelle est la masse d'un panneau de contreplaqué de 4,5 m^2, sachant que 1 m^2 de ce matériau a une masse de 2,3 kg ?

f) Jérôme mesure 1,75 m, soit 16 cm de plus que son père. Quelle est la taille de celui-ci ?

Exercice 5

Donne l'écriture décimale des fractions suivantes. Explique toujours ton résultat : si tu passes par une puissance de 10, indique la fraction équivalente avec la puissance de 10. Si tu passes par une division, indique le calcul de division et fais attention à la position des chiffres après la virgule. Si tu passes par une écriture décimale déjà connue, indique comment (par exemple $\frac{2}{9} = 2 \cdot \frac{1}{9} = 2 \cdot 0,\overline{1} = 0,\overline{2}$). On peut aussi utiliser l'addition de fractions. Indique aussi si tu simplifies la fraction au préalable.

1) $\frac{3}{5}$	4) $\frac{3}{8}$	7) $\frac{5}{9}$	10) $\frac{18}{6}$	13) $\frac{24}{320}$	16) $\frac{13}{12}$
2) $\frac{1}{3}$	5) $\frac{2}{3}$	8) $\frac{7}{3}$	11) $\frac{7}{12}$	14) $\frac{2}{7}$	
3) $\frac{25}{5}$	6) $\frac{4}{5}$	9) $\frac{1}{6}$	12) $\frac{3}{125}$	15) $\frac{36}{48}$	

Que peux-tu dire sur les fractions avec un 7 au dénominateur ?

Exercice 6

Donne l'écriture fractionnaire irréductible des nombres suivants. Indique ton raisonnement (méthode de ton choix).

1) $0,6$	3) $0,125$	5) $2,1$	7) $5,22$	9) $0,\overline{55}$	11) $2,00\overline{35}$
2) $0,8$	4) $0,07$	6) $3,45$	8) $0,\overline{7}$	10) $1,1\overline{4}$	12) $0,12\overline{345}$

Exercice 7

NO186 Etonnant, non?

Voici un extrait des statistiques d'un match de basket concernant les lancers francs réussis par deux joueurs au cours des première et deuxième mi-temps:

	1re mi-temps	2e mi-temps
Hervé	5 sur 7	1 sur 4
Gilles	3 sur 4	2 sur 7

Qui s'est montré le plus habile:

a) lors de la première mi-temps?

b) lors de la deuxième mi-temps?

c) sur l'ensemble de la partie?

Le **paradoxe de Simpson** a été étudié en 1951 par le Britannique Edward Simpson. Il avait remarqué que, parfois, le succès de plusieurs groupes s'inverse lorsque les groupes sont combinés. Ce résultat, qui semble d'abord impossible, est souvent rencontré dans la réalité, dans les sciences sociales et les statistiques médicales.

Il a été notamment mis en évidence aux Etats-Unis en 1964, tant à la Chambre des représentants qu'au Sénat, lors du vote du *Civil Rights Act* qui mettait hors la loi la ségrégation raciale.

Chambre des représentants	Démocrates	Républicains
Etats du Nord	94% (145/154)	85% (138/162)
Etats du Sud	7% (7/94)	0% (0/10)
Ensemble	61% (152/248)	80% (138/172)

Sénat	Démocrates	Républicains
Etats du Nord	98% (45/46)	84% (27/32)
Etats du Sud	5% (1/21)	0% (0/1)
Ensemble	69% (46/67)	80% (27/33)

Dans les Etats du Sud comme dans ceux du Nord, le taux d'élus démocrates à approuver cette loi fut supérieur à celui des Républicains, tant à la Chambre des représentants qu'au Sénat. Cependant, tous Etats confondus et pour les deux chambres, le taux de votants des élus favorables à la suppression de cette loi fut plus élevé chez les élus républicains.

Exercice 8

NO225 Remue-méninges sans calculatrice

a) Combien de fois faut-il additionner 10^{-3} à lui-même pour arriver à 10^2?

Combien de fois peut-on mettre:

b) $5 \cdot 10^3$ s dans $5 \cdot 10^6$ s?

c) 50 g dans 10^4 g?

d) 10^{-2} mm dans 10^6 mm?

e) $2 \cdot 10^{-3}$ mm^2 dans 1 mm^2?

Exercice 9

Démontre que le nombre $7,\overline{9}$ est égal au nombre 8. Tu pourras pour cela calculer 9 fois $7,\overline{9}$ de façon à pouvoir le comparer à 8.

Cet exercice montre que l'écriture décimale d'un nombre *n'est pas unique* ! Faites donc bien attention lorsque vous effectuez des calculs avec votre machine à calculer, qui risque parfois d'arrondir un nombre sous forme décimale et ne pas reconnaître 8 lorsque le résultat d'un calcul donne $7,\overline{9}$.

Exercice 10 (Optionnel)

Effectue les calculs suivants mentalement (en utilisant les propriétés des opérations $+$ et $\cdot$ pour te simplifier la vie !). Cet exercice ne sera pas corrigé, l'important est de développer des astuces basées sur une bonne compréhension des opérations dans $\mathbb{Q}$.

a) $43 + (999 \cdot 43)$

b) $2,5 \cdot 17,4 \cdot 4$

c) $2,5 : 0,2$

d) $42,42 + 17,55 - 2,42$

e) $(88 \cdot 3,14) + (12 \cdot 3,14)$

f) $(6 \cdot 1,3) - (3 \cdot 1,3) - (3 \cdot 1,3)$

g) $12,25 + 9,5 - 12,25$

h) $(2,2 \cdot 0,8) - (0,2 \cdot 0,8)$

i) $0,2^2 : 0,2^2$

j) $(15 : 0,5) \cdot 0,5$

Exercice 11 (Optionnel)

Cet exercice ne sera pas corrigé ! Il est là pour ceux qui aimeraient encore pratiquer un peu...

206.

Calcule :

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{8} + \frac{5}{6}$

c) $1,2 + \frac{3}{10}$

d) $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$

j) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

k) $\frac{3}{7} : \frac{7}{6}$

l) $\frac{3^2}{10} + 0,1$

m) $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9}$

s) $\frac{\frac{2}{3}}{4}$

t) $0,25 \cdot \frac{2}{5}$

u) $\frac{12}{\frac{8}{5}}$

v) $\frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{5}$

e) $\frac{4}{9} - \frac{5}{12}$

n) $\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$

f) $\frac{6}{100} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{2}{3}$

o) $4 - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}$

w) $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}$

g) $\frac{11}{6} - \frac{3}{4}$

p) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$

x) $\frac{3}{2} : 0{,}\overline{3}$

h) $\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5}$

q) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$

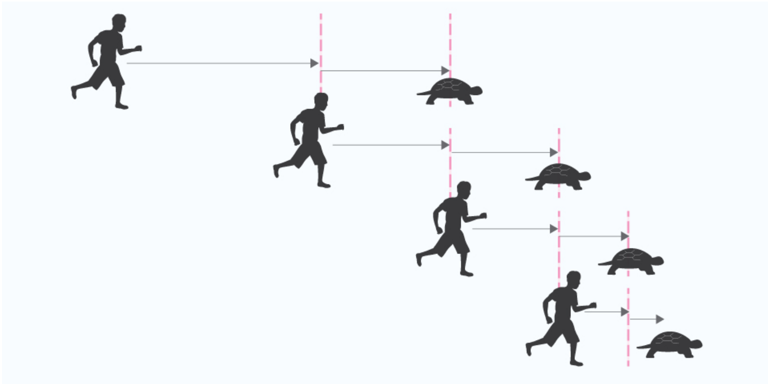
i) $\frac{9}{16} - \frac{1}{4}$

r) $6 \cdot \frac{5}{3}$

Exercice 12 (Optionnel)

Et pour terminer un exercice de culture générale qui vous plaira sûrement ! Cet exercice ne sera pas corrigé (mais un corrigé sera fourni !).

Le retour du sophiste. Les *sophistes* étaient des philosophes grecs qui prétendaient pouvoir montrer tout et son contraire (autrement dit, que tout est paradoxal). En fait leurs paradoxes n'en étaient qu'en apparence. Ils trompaient leurs adversaires en prétendant qu'une certaine implication $R \Rightarrow S$ est vraie (alors qu'elle est fausse). Alors si R est vraie, ils peuvent en conclure que S doit être vraie (et S est leur paradoxe). Nous avons déjà démasqué un faux paradoxe sophiste où l'implication prétendument vraie était « Je possède ce que je n'ai pas perdu », c'est-à-dire « Si je n'ai pas perdu quelque chose, je le possède. » Si cette implication est vraie, alors il est vrai que les poules ont des dents (car elles ne les ont pas perdues).
Le paradoxe suivant, dû à Zénon (environ 150 av. J.-C.), est évidemment contredit par l'expérience. Mais il a fallu attendre le XIX^{e} siècle (!) pour que l'on sache prouver mathématiquement que ce n'est pas un paradoxe. Une telle preuve nécessite des mathématiques universitaires, mais nous allons déjà ici pouvoir approcher la réponse. Voilà le *paradoxe d'Achille et de la tortue.*
Pour simplifier l'énoncé, nous allons supposer qu'Achille court à 10 mètres/seconde et que la tortue avance à 1 mètre/seconde (tortue de compétition). Au départ, la tortue a 100 m d'avance sur Achille. Les deux avancent en ligne droite. Pour atteindre la position initiale de la tortue, il faut 10 s à Achille. Mais pendant ces 10 s, la tortue a parcouru 10 m. Cela prend alors 1 s à Achille pour atteindre ce point, mais pendant cette seconde, la tortue a de nouveau pu avancer de 1 m. Et ainsi de suite : à chaque fois qu'Achille atteint le point où se trouvait la tortue, cette dernière a pu avancer d'un dixième de la distance qui la séparait d'Achille. Donc Achille ne rattrape jamais la tortue.



1) Dessine un tableau à trois colonnes. Dans la première colonne tu indiqueras les secondes, dans la deuxième la position d'Achille et dans la troisième la position de la tortue. Au départ ($t = 0\ s$), on suppose qu'Achille est à la position 0 m et donc la tortue est à la position 100 m. Chaque ligne du tableau correspond à une étape du processus décrit ci-dessus. La deuxième ligne correspond donc au temps t = 10 s. Décris 5 étapes. Explique comment tu obtiens les valeurs des colonnes.

2) Est-ce qu'Achille rattrape la tortue après un nombre n fini d'étapes ?

3) Est-ce qu'il faut un temps infini pour effectuer un nombre infini d'étapes ? Si oui, pourquoi ? Sinon, quel est ce temps et quelle est la position d'Achille et de la tortue à ce moment.

4) Peux-tu dire maintenant où se trouve l'erreur de raisonnement de Zénon ?