

# Cours Euler: Corrigé 5

16 septembre 2026

## Exercice 1

**Les Tapis de Sierpinski.** Ces triangles et carrés auxquels on enlève successivement des triangles et des carrés plus petits de manière systématique produisent « à la limite » des objets appelés *fractales*.

a)  $f_2 = \frac{3}{4} \cdot f_1$   
 $f_3 = \frac{3}{4} \cdot f_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot f_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot f_1 = \frac{9}{16} \cdot f_1$   
 $f_4 = \frac{3}{4} \cdot f_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot f_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot f_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot f_1 = \frac{27}{64} \cdot f_1$   
 $f_5 = \frac{81}{256} \cdot f_1$

b)  $f_{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{14} \cdot f_1$   $f_5 = \frac{4096}{6561} \cdot f_1$

c)  $f_2 = \frac{8}{9} \cdot f_1$   $\dots$   
 $f_3 = \frac{64}{81} \cdot f_1$   $f_{15} = \left(\frac{8}{9}\right)^{14} \cdot f_1$   
 $f_4 = \frac{512}{729} \cdot f_1$

## Exercice 2

C'est le troisième élève qui a raison, pour diviser il faut multiplier par l'inverse! Le deuxième a effectué le produit au lieu du quotient, le premier a juxtaposé les numérateurs et les dénominateurs. Il a fait n'importe quoi!

|                    |                  |                   |                      |
|--------------------|------------------|-------------------|----------------------|
| a) $-\frac{1}{18}$ | c) $\frac{1}{6}$ | e) $-\frac{3}{4}$ | g) $\frac{1}{8}$     |
| b) $\frac{1}{20}$  | d) $-24$         | f) $-3$           | h) $-\frac{13}{500}$ |

**Exercice 3****Multiplications et divisions.**

$$a) \frac{9}{10} \cdot \frac{55}{72} \cdot \frac{64}{11} = \frac{9}{5 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 11}{8 \cdot 9} \cdot \frac{8 \cdot 8}{11} = \frac{8}{2} = 4$$

$$b) \frac{20}{4} \cdot \frac{32}{1000} \cdot 5 = 5 \cdot \frac{2^5}{10^3} \cdot 5 = \frac{2^5 \cdot 5^2}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{2^5 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$c) \frac{14}{75} \cdot \frac{15}{3} \cdot \frac{125}{35} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 15} \cdot \frac{15}{3} \cdot \frac{5 \cdot 25}{5 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}$$

$$d) \frac{78}{12} \cdot \frac{52}{39} \cdot \frac{6}{16} = \frac{2 \cdot 39}{2 \cdot 6} \cdot \frac{4 \cdot 13}{39} \cdot \frac{6}{4 \cdot 4} = \frac{13}{4}$$

$$e) \frac{64 \cdot 35 \cdot 6}{105 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 35 \cdot 6}{35 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 4} = 4$$

$$f) \frac{125 \cdot 270 \cdot 114}{3 \cdot 90 \cdot 62} = \frac{125 \cdot 270 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 19}{270 \cdot 2 \cdot 31} = \frac{125 \cdot 3 \cdot 19}{31} = \frac{7125}{31}$$

$$g) \frac{150 \cdot 81 \cdot 5}{270 \cdot 360 \cdot 30} = \frac{15 \cdot 81 \cdot 5}{27 \cdot 360 \cdot 30} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 3^4 \cdot 5}{3^3 \cdot (3 \cdot 2)^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3^5 \cdot 5^2}{2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2} = \frac{1}{2^4 \cdot 3} = \frac{1}{48}$$

$$h) \frac{28 \cdot 24 \cdot 13}{72 \cdot 64 \cdot 28} = \frac{24 \cdot 13}{72 \cdot 64} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 13}{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{13}{3 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{13}{192}$$

Et pour la série avec divisions :

$$a) \left(\frac{4}{3} : \frac{4}{3}\right) : \frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$e) \left(\frac{5}{4} : \frac{2}{3}\right) \cdot 4 = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 = \frac{15}{2}$$

$$b) \frac{4}{3} : \left(\frac{4}{3} : \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} : \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{4}{3}$$

$$f) \frac{5}{4} : \left(\frac{2}{3} \cdot 4\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{32}$$

$$c) \frac{2}{5} : \left(\frac{4}{5} : 3\right) = \frac{2}{5} : \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{3}{2}$$

$$g) \left(0 : \frac{3}{4}\right) : \frac{4}{3} = 0 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 0$$

$$d) \frac{7}{10} : \left(\frac{15}{4} : \frac{1}{15}\right) = \frac{7}{10} : \left(\frac{15}{4} \cdot 15\right) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{225} = \frac{7 \cdot 4}{10 \cdot 225} = \frac{14}{1125}$$

$$h) \left(\frac{3}{8} \cdot 0\right) : \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \cdot 0 \cdot 4 = 0$$

**Exercice 4**

- a)  $\frac{1}{18}$       b)  $-\frac{1}{23}$       c)  $-\frac{100}{3}$       d) 1
- e)  $\frac{4}{27}$       f)  $-\frac{5}{3}$       g)  $\frac{1}{2}$       h)  $\frac{1}{a}$  (pour  $a$  non nul)

**Exercice 5**

- Pour savoir combien de bouteilles de  $\frac{7}{10}$  L on peut obtenir avec 490 L, on divise 490 par  $\frac{7}{10}$ .  
On a  $490 : \frac{7}{10} = 7 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \frac{10}{7} = 7 \cdot 10 \cdot 10 = 700$ . On peut donc remplir 700 bouteilles de  $\frac{7}{10}$  L avec 490 L.
- Pour savoir combien de tours sont nécessaires pour que la vis s'enfonce de 4,5 mm, on divise 4,5 mm par  $\frac{9}{10}$  mm. On a  $4,5 : \frac{9}{10} = 4,5 \cdot \frac{10}{9} = \frac{45}{9} = 5$ . On doit donc faire 5 tours de vis pour enfoncer la vis de 4,5 mm.
- Le bassin est rempli aux  $\frac{2}{3}$ . Par conséquent il reste  $\frac{1}{3}$  du bassin à remplir pour qu'il soit plein.  
Comme les  $\frac{2}{3}$  du bassin représentent 1248 L, on divise 1248 par 2 pour obtenir le nombre de litres correspondant à  $\frac{1}{3}$  de la contenance du bassin. On a  $1248 : 2 = 624$ . Et ainsi, il faut ajouter 624 L pour remplir le bassin.

**Exercice 6**

- 1)  $\frac{3}{7} + \frac{2}{14} = \frac{6}{14} + \frac{2}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$       5)  $\frac{13}{9} + \frac{15}{27} = \frac{13}{9} + \frac{5}{9} = \frac{18}{9} = 2$
- 2)  $\frac{8}{3} + \left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{32}{12} + \left(\frac{-15}{12}\right) = \frac{32 + (-15)}{12} = \frac{17}{12}$       6)  $\frac{15}{7} + 3 = \frac{15}{7} + \frac{21}{7} = \frac{36}{7}$
- 3)  $\frac{28}{49} + \frac{64}{56} = \frac{4}{7} + \frac{8}{7} = \frac{12}{7}$       7)  $\frac{27}{10} + \frac{25}{30} = \frac{81}{30} + \frac{25}{30} = \frac{106}{30} = \frac{53}{15}$
- 4)  $-\frac{11}{12} + \frac{7}{18} = -\frac{33}{36} + \frac{14}{36} = \frac{-19}{36} = -\frac{19}{36}$       8)  $\frac{250}{1750} + \frac{27}{126} = \frac{2}{14} + \frac{3}{14} = \frac{5}{14}$

**Exercice 7**

- 1)  $\frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{12}{15} - \frac{5}{15} = \frac{12-5}{15} = \frac{7}{15}$       4)  $\frac{18}{20} - \left(\frac{-20}{30}\right) = \frac{9}{10} + \frac{2}{3} = \frac{27}{30} + \frac{20}{30} = \frac{47}{30}$
- 2)  $\frac{7}{3} - \frac{2}{27} = \frac{63}{27} - \frac{2}{27} = \frac{61}{27}$       5)  $\frac{75}{125} - \frac{140}{420} = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{9}{15} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$
- 3)  $\frac{-11}{6} - \frac{3}{8} = \frac{-44}{24} - \frac{9}{24} = \frac{-44-9}{24} = \frac{-53}{24}$

**Exercice 8**

$$1) \frac{3}{8} + \frac{7}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{24} + \frac{42}{24} + \frac{20}{24} = \frac{71}{24}$$

$$2) \frac{1}{27} - \frac{8}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{27} - \frac{72}{27} - \frac{6}{27} = \frac{-77}{27}$$

$$3) -\frac{4}{7} - \left(\frac{17}{42} - \frac{22}{84}\right) = -\frac{4}{7} - \left(\frac{34}{84} - \frac{22}{84}\right) = -\frac{4}{7} - \frac{12}{84} = -\frac{4}{7} - \frac{3}{21} = -\frac{12}{21} - \frac{3}{21} = \frac{-15}{21} = -\frac{5}{7}$$

$$4) -\left(\frac{25}{15} + \frac{64}{24}\right) - \frac{45}{27} = -\left(\frac{5}{3} + \frac{8}{3}\right) - \frac{5}{3} = -\frac{13}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{18}{3} = -6$$

**Exercice 9**

Par exemple

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = 1, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = 1.$$

On obtient 2 par exemple de la manière suivante :

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40}.$$

**Exercice 10**

**Preuve 1** (utilise le fait qu'on peut utiliser n'importe quelle paire de fractions équivalentes à nos deux fractions ayant un même dénominateur) :

Soient  $r, s \in \mathbb{Q}$ . Alors il existe des fractions  $r = \frac{a}{c}$  et  $s = \frac{b}{c}$  qui les représentent. Donc

$$r + s = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \stackrel{\text{comm. add. dans } \mathbb{Z}}{=} \frac{b+a}{c} = \frac{b}{c} + \frac{a}{c} = s + r.$$

**Preuve 2** (direct par la définition de l'addition) : Soient  $r, s$  deux nombres rationnels. Par définition de  $\mathbb{Q}$ , il existe des fractions  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  qui les représentent. Calculons donc la somme  $r + s = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ . Par définition de la somme c'est

$$\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b + d \cdot a}{d \cdot b} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = s + r$$

où nous avons utilisé la commutativité de l'addition et de la multiplication dans  $\mathbb{Z}$  pour la première égalité, puis la définition de la somme dans  $\mathbb{Q}$ . Le résultat est démontré.

**Exercice 11**

On transforme toutes les mesures en cm. De cette façon, l'exercice n'a plus rien à voir avec les nombres décimaux... On a d'une part une hauteur de 288 cm, d'autre part 352 cm. Comme  $288 = 2 \cdot 144 = 2 \cdot (12)^2 = 2^5 \cdot 3^2$  et  $352 = 2 \cdot 176 = 2 \cdot 2 \cdot 88 = 2^5 \cdot 11$ , on constate que le pgcd vaut  $2^5 = 32$ . Il faut donc choisir des marches de  $2^4 = 16$  cm.

Pour construire l'escalier il faudra  $\frac{288}{16} + \frac{352}{16} = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 11 = 18 + 22 = 40$  marches.

**Exercice 12 (Optionnel)**

**Le compte est max.** On obtient au maximum  $\frac{7}{2} : \left[ \left( \frac{5}{8} - \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{1}{8} \right] = 1120$ .

L'idée pour résoudre cet exercice est de créer les plus grands et petits nombres possibles, puis les diviser entre eux. En effet, la division de  $a$  par  $b$  revient à multiplier  $a$  par l'inverse  $b$  et plus  $b$  est petit, plus l'inverse de  $b$  devient grand.

Maintenant que vous connaissez la technique, essayez de refaire le même exercice pour les nombres  $a = -0,9$ ,  $b = 0,8$ ,  $c = 2,4$  et  $d = -0,2$ . La réponse est 120 (!) mais comment l'obtient-on ?