# Cours Euler: Corrigé 5

17 septembre 2025

**Exercice 1**

**Les Tapis de Sierpinski.** Ces triangles et carrés auxquels on enlève successivement des triangles et des carrés plus petits de manière systématique produisent « à la limite » des objets appelés *fractales*.

a)
$$f_2 = \frac{3}{4} \cdot f_1$$
$$f_3 = \frac{3}{4} \cdot f_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot f_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot f_1 = \frac{9}{16} \cdot f_1$$
$$f_4 = \frac{3}{4} \cdot f_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot f_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot f_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot f_1 = \frac{27}{64} \cdot f_1$$
$$f_5 = \frac{81}{256} \cdot f_1$$

b) $f_{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{14} \cdot f_1$

c)
$$f_2 = \frac{8}{9} \cdot f_1$$
$$f_3 = \frac{64}{81} \cdot f_1$$
$$f_4 = \frac{512}{729} \cdot f_1$$
$$f_5 = \frac{4096}{6561} \cdot f_1$$
$$\cdots$$
$$f_{15} = \left(\frac{8}{9}\right)^{14} \cdot f_1$$

**Exercice 2**

C'est le troisième élève qui a raison, pour diviser il faut multiplier par l'inverse ! Le deuxième a effectué le produit au lieu du quotient, le premier a juxtaposé les numérateurs et les dénominateurs. Il a fait n'importe quoi !

a) $-\frac{1}{18}$ c) $\frac{1}{6}$ e) $-\frac{3}{4}$ g) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{20}$ d) $-24$ f) $-3$ h) $-\frac{13}{500}$

**Exercice 3**

**Multiplications et divisions.**

a) $\dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{55}{72} \cdot \dfrac{64}{11} = \dfrac{9}{5 \cdot 2} \cdot \dfrac{5 \cdot 11}{8 \cdot 9} \cdot \dfrac{8 \cdot 8}{11} = \dfrac{8}{2} = 4$

b) $\dfrac{20}{4} \cdot \dfrac{32}{1000} \cdot 5 = 5 \cdot \dfrac{2^5}{10^3} \cdot 5 = \dfrac{2^5 \cdot 5^2}{(2 \cdot 5)^3} = \dfrac{2^5 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \dfrac{2^2}{5} = \dfrac{4}{5}$

c) $\dfrac{14}{75} \cdot \dfrac{15}{3} \cdot \dfrac{125}{35} = \dfrac{2 \cdot 7}{5 \cdot 15} \cdot \dfrac{15}{3} \cdot \dfrac{5 \cdot 25}{5 \cdot 7} = \dfrac{2 \cdot 5}{3} = \dfrac{10}{3}$

d) $\dfrac{78}{12} \cdot \dfrac{52}{39} \cdot \dfrac{6}{16} = \dfrac{2 \cdot 39}{2 \cdot 6} \cdot \dfrac{4 \cdot 13}{39} \cdot \dfrac{6}{4 \cdot 4} = \dfrac{13}{4}$

e) $\dfrac{64 \cdot 35 \cdot 6}{105 \cdot 4 \cdot 8} = \dfrac{8 \cdot 8 \cdot 35 \cdot 6}{35 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8} = \dfrac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 4} = 4$

f) $\dfrac{125 \cdot 270 \cdot 114}{3 \cdot 90 \cdot 62} = \dfrac{125 \cdot 270 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 19}{270 \cdot 2 \cdot 31} = \dfrac{125 \cdot 3 \cdot 19}{31} = \dfrac{7125}{31}$

g) $\dfrac{150 \cdot 81 \cdot 5}{270 \cdot 360 \cdot 30} = \dfrac{15 \cdot 81 \cdot 5}{27 \cdot 360 \cdot 30} = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 3^4 \cdot 5}{3^3 \cdot (3 \cdot 2)^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5} = \dfrac{3^5 \cdot 5^2}{2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2} = \dfrac{1}{2^4 \cdot 3} = \dfrac{1}{48}$

h) $\dfrac{28 \cdot 24 \cdot 13}{72 \cdot 64 \cdot 28} = \dfrac{24 \cdot 13}{72 \cdot 64} = \dfrac{3 \cdot 8 \cdot 13}{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8} = \dfrac{13}{3 \cdot 8 \cdot 8} = \dfrac{13}{192}$

Et pour la série avec divisions :

a) $\left(\dfrac{4}{3} : \dfrac{4}{3}\right) : \dfrac{4}{3} = \left(\dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3}{4}\right) \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{4}{3} : \left(\dfrac{4}{3} : \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{4}{3} : \left(\dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{4}{3}$

c) $\dfrac{2}{5} : \left(\dfrac{4}{5} : 3\right) = \dfrac{2}{5} : \left(\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{15}{4} = \dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{7}{10} : \left(\dfrac{15}{4} : \dfrac{1}{15}\right) = \dfrac{7}{10} : \left(\dfrac{15}{4} \cdot 15\right) = \dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{4}{225} = \dfrac{7 \cdot 4}{10 \cdot 225} = \dfrac{14}{1125}$

e) $\left(\dfrac{5}{4} : \dfrac{2}{3}\right) \cdot 4 = \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 4 = \dfrac{15}{2}$

f) $\dfrac{5}{4} : \left(\dfrac{2}{3} \cdot 4\right) = \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{15}{32}$

g) $\left(0 : \dfrac{3}{4}\right) : \dfrac{4}{3} = 0 \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3}{4} = 0$

h) $\left(\dfrac{3}{8} \cdot 0\right) : \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{8} \cdot 0 \cdot 4 = 0$

**Exercice 4**

a) $\frac{1}{18}$ b) $-\frac{1}{23}$ c) $-\frac{100}{3}$ d) $1$

e) $\frac{4}{27}$ f) $-\frac{5}{3}$ g) $\frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{a}$ (pour a non nul)

**Exercice 5**

— Pour savoir combien de bouteilles de $\frac{7}{10}$ L on peut obtenir avec 490 L, on divise 490 par $\frac{7}{10}$. On a $490 : \frac{7}{10} = 7 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \frac{10}{7} = 7 \cdot 10 \cdot 10 = 700$. On peut donc remplir 700 bouteilles de $\frac{7}{10}$ L avec 490 L.

— Pour savoir combien de tours sont nécessaires pour que la vis s'enfonce de 4,5 mm, on divise 4,5 mm par $\frac{9}{10}$ mm. On a $4,5 : \frac{9}{10} = 4,5 \cdot \frac{10}{9} = \frac{45}{9} = 5$. On doit donc faire 5 tours de vis pour enfoncer la vis de 4,5 mm.

— Le bassin est rempli aux $\frac{2}{3}$. Par conséquent il reste $\frac{1}{3}$ du bassin à remplir pour qu'il soit plein. Comme les $\frac{2}{3}$ du bassin représentent 1248 L, on divise 1248 par 2 pour obtenir le nombre de litres correspondant à $\frac{1}{3}$ de la contenance du bassin. On a $1248 : 2 = 624$. Et ainsi, il faut ajouter 624 L pour remplir le bassin.

**Exercice 6**

1) $\frac{3}{7} + \frac{2}{14} = \frac{6}{14} + \frac{2}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

2) $\frac{8}{3} + \left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{32}{12} + \left(\frac{-15}{12}\right) = \frac{32 + (-15)}{12} = \frac{17}{12}$

3) $\frac{28}{49} + \frac{64}{56} = \frac{4}{7} + \frac{8}{7} = \frac{12}{7}$

4) $-\frac{11}{12} + \frac{7}{18} = -\frac{33}{36} + \frac{14}{36} = \frac{-19}{36} = -\frac{19}{36}$

5) $\frac{13}{9} + \frac{15}{27} = \frac{13}{9} + \frac{5}{9} = \frac{18}{9} = 2$

6) $\frac{15}{7} + 3 = \frac{15}{7} + \frac{21}{7} = \frac{36}{7}$

7) $\frac{27}{10} + \frac{25}{30} = \frac{81}{30} + \frac{25}{30} = \frac{106}{30} = \frac{53}{15}$

8) $\frac{250}{1750} + \frac{27}{126} = \frac{2}{14} + \frac{3}{14} = \frac{5}{14}$

**Exercice 7**

1) $\frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{12}{15} - \frac{5}{15} = \frac{12-5}{15} = \frac{7}{15}$

2) $\frac{7}{3} - \frac{2}{27} = \frac{63}{27} - \frac{2}{27} = \frac{61}{27}$

3) $\frac{-11}{6} - \frac{3}{8} = \frac{-44}{24} - \frac{9}{24} = \frac{-44-9}{24} = \frac{-53}{24}$

4) $\frac{18}{20} - \left(\frac{-20}{30}\right) = \frac{9}{10} + \frac{2}{3} = \frac{27}{30} + \frac{20}{30} = \frac{47}{30}$

5) $\frac{75}{125} - \frac{140}{420} = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{9}{15} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$

**Exercice 8**

1) $\dfrac{3}{8}+\dfrac{7}{4}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{9}{24}+\dfrac{42}{24}+\dfrac{20}{24}=\dfrac{71}{24}$

2) $\dfrac{1}{27}-\dfrac{8}{3}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{27}-\dfrac{72}{27}-\dfrac{6}{27}=\dfrac{-77}{27}$

3) $-\dfrac{4}{7}-\left(\dfrac{17}{42}-\dfrac{22}{84}\right)=-\dfrac{4}{7}-\left(\dfrac{34}{84}-\dfrac{22}{84}\right)=-\dfrac{4}{7}-\dfrac{12}{84}=-\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{21}=-\dfrac{12}{21}-\dfrac{3}{21}=\dfrac{-15}{21}=-\dfrac{5}{7}$

4) $-\left(\dfrac{25}{15}+\dfrac{64}{24}\right)-\dfrac{45}{27}=-\left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{8}{3}\right)-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{13}{3}-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{18}{3}=-6$

**Exercice 9**

Par exemple

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1,\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1,\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{20}=1.$$

On obtient 2 par exemple de la manière suivante :

$$2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}.$$

**Exercice 10**

**Preuve 1** (utilise le fait qu'on peut utiliser n'importe quelle paire de fractions équivalentes à nos deux fractions ayant un même dénominateur) :
Soient $r, s \in \mathbb{Q}$. Alors il existe des fractions $r=\dfrac{a}{c}$ et $s=\dfrac{b}{c}$ qui les représentent. Donc

$$r+s=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}\overset{\text{comm. add. dans } \mathbb{Z}}{=}\frac{b+a}{c}=\frac{b}{c}+\frac{a}{c}=s+r.$$

**Preuve 2** (direct par la définition de l'addition) : Soient $r, s$ deux nombres rationnels. Par définition de $\mathbb{Q}$, il existe des fractions $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}$ qui les représentent. Calculons donc la somme $r+s=\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$. Par définition de la somme c'est

$$\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{c\cdot b+d\cdot a}{d\cdot b}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}=s+r$$

où nous avons utilisé la commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}$ pour la première égalité, puis la définition de la somme dans $\mathbb{Q}$. Le résultat est démontré.

**Exercice 11**

On transforme toutes les mesures en cm. De cette façon, l'exercice n'a plus rien à voir avec les nombres décimaux... On a d'une part une hauteur de 288 cm, d'autre part 352 cm. Comme $288 = 2\cdot 144 = 2\cdot(12)^2 = 2^5\cdot 3^2$ et $352 = 2\cdot 176 = 2\cdot 2\cdot 88 = 2^5\cdot 11$, on constate que le pgcd vaut $2^5 = 32$. Il faut donc choisir des marches de $2^4 = 16$ cm.
Pour construire l'escalier il faudra $\dfrac{288}{16}+\dfrac{352}{16}=2\cdot 3^2+2\cdot 11=18+22=40$ marches.

**Exercice 12 (Optionnel)**

**Le compte est max.** On obtient au maximum $\frac{7}{2} : \left[\left(\frac{5}{8} - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{8}\right] = 1120$.

L'idée pour résoudre cet exercice est de créer les plus grands et petits nombres possibles, puis les diviser entre eux. En effet, la division de $a$ par $b$ revient à multiplier $a$ par l'inverse $b$ et plus $b$ est petit, plus l'inverse de $b$ devient grand.

Maintenant que vous connaissez la technique, essayez de refaire le même exercice pour les nombres $a = -0,9$, $b = 0,8$, $c = 2,4$ et $d = -0,2$. La réponse est 120 (!) mais comment l'obtient-on ?