

Cours Euler: Corrigé 5

20 septembre 2023

Exercice 1

Les Tapis de Sierpinski. Ces triangles et carrés auxquels on enlève successivement des triangles et des carrés plus petits de manière systématique produisent « à la limite » des objets appelés *fractales*.

$$\begin{aligned} \text{a) } f_2 &= \frac{3}{4} \cdot f_1 \\ f_3 &= \frac{3}{4} \cdot f_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot f_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot f_1 = \frac{9}{16} \cdot f_1 \\ f_4 &= \frac{3}{4} \cdot f_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot f_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot f_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot f_1 = \frac{27}{64} \cdot f_1 \\ f_5 &= \frac{81}{256} \cdot f_1 \end{aligned}$$

$$\text{b) } f_{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{14} \cdot f_1 \qquad f_5 = \frac{4096}{6561} \cdot f_1$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f_2 &= \frac{8}{9} \cdot f_1 && \dots \\ f_3 &= \frac{64}{81} \cdot f_1 && f_{15} = \left(\frac{8}{9}\right)^{14} \cdot f_1 \\ f_4 &= \frac{512}{729} \cdot f_1 \end{aligned}$$

Exercice 2

C'est le troisième élève qui a raison, pour diviser il faut multiplier par l'inverse! Le deuxième a effectué le produit au lieu du quotient, le premier a juxtaposé les numérateurs et les dénominateurs. Il a fait n'importe quoi!

$$\begin{array}{llll} \text{a) } -\frac{1}{18} & \text{c) } \frac{1}{6} & \text{e) } -\frac{3}{4} & \text{g) } \frac{1}{8} \\ \text{b) } \frac{1}{20} & \text{d) } -24 & \text{f) } -3 & \text{h) } -\frac{13}{500} \end{array}$$

Exercice 3

Multiplications et divisions.

$$\text{a) } \frac{9}{10} \cdot \frac{55}{72} \cdot \frac{64}{11} = \frac{9}{5 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 11}{8 \cdot 9} \cdot \frac{8 \cdot 8}{11} = \frac{8}{2} = 4$$

$$b) \frac{20}{4} \cdot \frac{32}{1000} \cdot 5 = 5 \cdot \frac{2^5}{10^3} \cdot 5 = \frac{2^5 \cdot 5^2}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{2^5 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$c) \frac{14}{75} \cdot \frac{15}{3} \cdot \frac{125}{35} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 15} \cdot \frac{15}{3} \cdot \frac{5 \cdot 25}{5 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}$$

$$d) \frac{78}{12} \cdot \frac{52}{39} \cdot \frac{6}{16} = \frac{2 \cdot 39}{2 \cdot 6} \cdot \frac{4 \cdot 13}{39} \cdot \frac{6}{4 \cdot 4} = \frac{13}{4}$$

$$e) \frac{64 \cdot 35 \cdot 6}{105 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 35 \cdot 6}{35 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 4} = 4$$

$$f) \frac{125 \cdot 270 \cdot 114}{3 \cdot 90 \cdot 62} = \frac{125 \cdot 270 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 19}{270 \cdot 2 \cdot 31} = \frac{125 \cdot 3 \cdot 19}{31} = \frac{7125}{31}$$

$$g) \frac{150 \cdot 81 \cdot 5}{270 \cdot 360 \cdot 30} = \frac{15 \cdot 81 \cdot 5}{27 \cdot 360 \cdot 30} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 3^4 \cdot 5}{3^3 \cdot (3 \cdot 2)^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3^5 \cdot 5^2}{2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2} = \frac{1}{2^4 \cdot 3} = \frac{1}{48}$$

$$h) \frac{28 \cdot 24 \cdot 13}{72 \cdot 64 \cdot 28} = \frac{24 \cdot 13}{72 \cdot 64} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 13}{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{13}{3 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{13}{192}$$

Et pour la série avec divisions :

$$a) \left(\frac{4}{3} : \frac{4}{3}\right) : \frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$e) \left(\frac{5}{4} : \frac{2}{3}\right) \cdot 4 = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 = \frac{15}{2}$$

$$b) \frac{4}{3} : \left(\frac{4}{3} : \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} : \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{4}{3}$$

$$f) \frac{5}{4} : \left(\frac{2}{3} \cdot 4\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{32}$$

$$c) \frac{2}{5} : \left(\frac{4}{5} : 3\right) = \frac{2}{5} : \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{3}{2}$$

$$g) \left(0 : \frac{3}{4}\right) : \frac{4}{3} = 0 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 0$$

$$d) \frac{7}{10} : \left(\frac{15}{4} : \frac{1}{15}\right) = \frac{7}{10} : \left(\frac{15}{4} \cdot 15\right) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{225} = \frac{28}{2250} = \frac{14}{1125}$$

$$h) \left(\frac{3}{8} \cdot 0\right) : \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \cdot 0 \cdot 4 = 0$$

Exercice 4

$$a) \frac{1}{18}$$

$$b) -\frac{1}{23}$$

$$c) -\frac{100}{3}$$

$$d) 1$$

$$e) \frac{4}{27}$$

$$f) -\frac{5}{3}$$

$$g) \frac{1}{2}$$

$$h) \frac{1}{a} \quad (\text{pour } a \text{ non nul})$$

Exercice 5

- Pour savoir combien de bouteilles de $\frac{7}{10}$ L on peut obtenir avec 490 L, on divise 490 par $\frac{7}{10}$.
On a $490 : \frac{7}{10} = 7 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \frac{10}{7} = 7 \cdot 10 \cdot 10 = 700$. On peut donc remplir 700 bouteilles de $\frac{7}{10}$ L avec 490 L.
- Pour savoir combien de tours sont nécessaires pour que la vis s'enfonce de 4,5 mm, on divise 4,5 mm par $\frac{9}{10}$ mm. On a $4,5 : \frac{9}{10} = 4,5 \cdot \frac{10}{9} = \frac{45}{9} = 5$. On doit donc faire 5 tours de vis pour enfoncer la vis de 4,5 mm.
- Le bassin est rempli aux $\frac{2}{3}$. Par conséquent il reste $\frac{1}{3}$ du bassin à remplir pour qu'il soit plein.
Comme les $\frac{2}{3}$ du bassin représentent 1248 L, on divise 1248 par 2 pour obtenir le nombre de litres correspondant à $\frac{1}{3}$ de la contenance du bassin. On a $1248 : 2 = 624$. Et ainsi, il faut ajouter 624 L pour remplir le bassin.

Exercice 6

- 1) $\frac{3}{7} + \frac{2}{14} = \frac{6}{14} + \frac{2}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$
- 2) $\frac{8}{3} + \left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{32}{12} + \left(\frac{-15}{12}\right) = \frac{32 + (-15)}{12} = \frac{17}{12}$
- 3) $\frac{28}{49} + \frac{64}{56} = \frac{4}{7} + \frac{8}{7} = \frac{12}{7}$
- 4) $-\frac{11}{12} + \frac{7}{18} = -\frac{33}{36} + \frac{14}{36} = \frac{-33 + 14}{36} = -\frac{19}{36}$
- 5) $\frac{13}{9} + \frac{15}{27} = \frac{13}{9} + \frac{5}{9} = \frac{18}{9} = 2$
- 6) $\frac{15}{7} + 3 = \frac{15}{7} + \frac{21}{7} = \frac{36}{7}$
- 7) $\frac{27}{10} + \frac{25}{30} = \frac{81}{30} + \frac{25}{30} = \frac{106}{30} = \frac{53}{15}$
- 8) $\frac{250}{1750} + \frac{27}{126} = \frac{2}{14} + \frac{3}{14} = \frac{5}{14}$

Exercice 7

- 1) $\frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{12}{15} - \frac{5}{15} = \frac{12 - 5}{15} = \frac{7}{15}$
- 2) $\frac{7}{3} - \frac{2}{27} = \frac{63}{27} - \frac{2}{27} = \frac{61}{27}$
- 3) $\frac{-11}{6} - \frac{3}{8} = \frac{-44}{24} - \frac{9}{24} = \frac{-44 - 9}{24} = -\frac{53}{24}$
- 4) $\frac{18}{20} - \left(\frac{-20}{30}\right) = \frac{9}{10} + \frac{2}{3} = \frac{27}{30} + \frac{20}{30} = \frac{47}{30}$
- 5) $\frac{75}{125} - \frac{140}{420} = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{9}{15} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$

Exercice 8

- 1) $\frac{3}{8} + \frac{7}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{24} + \frac{42}{24} + \frac{20}{24} = \frac{71}{24}$
- 2) $\frac{1}{27} - \frac{8}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{27} - \frac{72}{27} - \frac{6}{27} = \frac{-77}{27}$
- 3) $-\frac{4}{7} - \left(\frac{17}{42} - \frac{22}{84}\right) = -\frac{4}{7} - \left(\frac{34}{84} - \frac{22}{84}\right) = -\frac{4}{7} - \frac{12}{84} = -\frac{4}{7} - \frac{3}{21} = -\frac{12}{21} - \frac{3}{21} = -\frac{15}{21} = -\frac{5}{7}$
- 4) $-\left(\frac{25}{15} + \frac{64}{24}\right) - \frac{45}{27} = -\left(\frac{5}{3} + \frac{8}{3}\right) - \frac{5}{3} = -\frac{13}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{18}{3} = -6$

Exercice 9

Par exemple

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = 1, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = 1.$$

On obtient 2 par exemple de la manière suivante :

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40}.$$

Exercice 10

Preuve 1 (utilise le fait qu'on peut utiliser n'importe quelle paire de fractions équivalentes à nos deux fractions ayant un même dénominateur) :

Soient $r, s \in \mathbb{Q}$. Alors il existe des fractions $r = \frac{a}{c}$ et $s = \frac{b}{c}$ qui les représentent. Donc

$$r + s = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \stackrel{\text{comm. add. dans } \mathbb{Z}}{=} \frac{b+a}{c} = \frac{b}{c} + \frac{a}{c} = s + r.$$

Preuve 2 (direct par la définition de l'addition) : Soient r, s deux nombres rationnels. Par définition de \mathbb{Q} , il existe des fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ qui les représentent. Calculons donc la somme $r + s = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Par définition de la somme c'est

$$\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b + d \cdot a}{d \cdot b} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = s + r$$

où nous avons utilisé la commutativité de l'addition et de la multiplication dans \mathbb{Z} pour la première égalité, puis la définition de la somme dans \mathbb{Q} . Le résultat est démontré.

Exercice 11

On transforme toutes les mesures en cm. De cette façon, l'exercice n'a plus rien à voir avec les nombres décimaux... On a d'une part une hauteur de 288 cm, d'autre part 352 cm. Comme $288 = 2 \cdot 144 = 2 \cdot (12)^2 = 2^5 \cdot 3^2$ et $352 = 2 \cdot 176 = 2 \cdot 2 \cdot 88 = 2^5 \cdot 11$, on constate que le pgcd vaut $2^5 = 32$. Il faut donc choisir des marches de $2^4 = 16$ cm.

Pour construire l'escalier il en faudra $\frac{288}{16} + \frac{352}{16} = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 11 = 18 + 22 = 40$.

Exercice 12 (Optionnel)

Le compte est max.

On obtient au maximum $\frac{7}{2} : \left[\left(\frac{5}{8} - \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{1}{8} \right] = 1120$.

L'idée pour résoudre cet exercice est de créer les plus grands et petits nombres possibles, puis les diviser entre eux. En effet, la division de a par b revient à multiplier a par l'inverse b et plus b est petit, plus l'inverse de b devient grand.

Maintenant que vous connaissez la technique, essayez de refaire le même exercice pour les nombres $a = -0,9$, $b = 0,8$, $c = 2,4$ et $d = -0,2$. La réponse est 120 (!) mais comment l'obtient-on ?