Cours Euler: Corrigé 2

30 août 2023

Exercice 1

L'opposé d'un nombre entier relatif a est le seul entier relatif noté $-a$ tel que $a+(-a)=0$. On a donc $-(-3)=(+3)$, $-(+7)=(-7)$, $-0=0$, $-[(-11)\cdot(-12)]:(-4)=(+33)$ et $-(-(-(-5)))=(+5)$.

Exercice 2

La valeur absolue. On calcule :

1. $|(-3)|=(-(-3))=(+3)$
2. $|(+3)|=(+3)$
3. $|0|=0$
4. $|-(-3)|=|(+3)|=(+3)$
5. $-|(-3)|=(-3)$
6. $-|-|(-3)||=-|(-3)|=(-3)$
7. $|||(+3)|||=||(+3)||=|(+3)|=(+3)$
8. $|-||(+3)|||=|-|(+3)||=|(-3)|=(+3)$

L'expression $|-a|=a$ est vraie si et seulement si a est positif ou nul. En effet la valeur absolue est toujours positive.

Exercice 3

Inégalité triangulaire. Il y a quatre cas à traiter en fonction du signe de a et de b.

1. Si a et b sont positifs, alors $a+b\geq 0$ et $|a+b|=a+b=|a|+|b|$.
2. Si $a\geq 0$ et $b<0$, alors $|a|=a$, $|b|=-b$ et

$$|a+b|=\begin{cases} a+b & \text{si } (a+b)\geq 0 \\ -(a+b)=-a-b & \text{si } (a+b)<0 \end{cases}$$

   Or si $|a+b|=a+b$, on a : $|a+b|=a+b=a-(-b)=|a|-|b|\leq |a|+|b|$. Si $|a+b|=-(a+b)=-a-b$, on a $|a+b|=-a-b=-a+(-b)=(-b)-a=|b|-|a|\leq |b|+|a|=|a|+|b|$.
3. Si $b\geq 0$ et $a<0$, la démonstration est la même que la précédente (on interchange simplement les rôles de a et b).
4. Si $a<0$ et $b<0$ alors $|a|=-a$, $|b|=-b$ et $|a+b|=-(a+b)=-a-b$. On a donc $|a+b|=-(a+b)=-a-b=-a+(-b)=|a|+|b|$.

Et ainsi, quelque soit les signes de a et b, on a $|a+b|\leq |a|+|b|$.

Exercice 4

1. $(-137) + (-58) = -(137 + 58) = (-195)$

   $(-137) - (-58) = (-137) + (-(-58)) = (-137) + (+58) = -(137 - 58) = (-79)$

2. $(-402) + (-593) = -(402 + 593) = (-995)$

   $(-402) - (-593) = (-402) + (-(-593)) = (-402) + (+593) = +(593 - 402) = (+191)$

3. $(-3708) + (-6237) = -(3708 + 6237) = (-9945)$

   $(-3708)-(-6237) = (-3708)+(-(-6237)) = (-3708)+(+6237) = +(6237-3708) = (+2529)$

4. $(+57) + (-26) = +(57 - 26) = (+31)$

   $(+57) - (-26) = (+57) + (-(-26)) = (+57) + (+26) = +(57 + 26) = (+83)$

5. $(+137) + (-306) = -(306 - 137) = (-169)$

   $(+137) - (-306) = (+137) + (-(-306)) = (+137) + (+306) = +(137 + 306) = (+443)$

6. $(+1372) + (-2507) = -(2507 - 1372) = (-1135)$

   $(+1372)-(-2507) = (+1372)+(-(-2507)) = (+1372)+(+2507) = +(1372+2507) = (+3879)$

7. $(-1054) + (+2184) = +(2184 - 1054) = (+1130)$

   $(-1054)-(+2184) = (-1054)+(-(+2184)) = (-1054)+(-2184) = -(1054+2184) = (-3238)$

8. $(-6217) + (+314) = (-6217) - (-314) = -(6217 - 314) = (-5903)$

   $(-6217) - (+314) = (-6217) + (-314) = -(6217 + 314) = (-6531)$

9. $(-237) + (+516) = +(516 - 237) = (+279)$

   $(-237) - (+516) = (-237) + (-(+516)) = (-237) + (-516) = -(237 + 516) = (-753)$

Exercice 5

Par définition, l'opposé $-(-a-b)$ de $-a-b$ est le seul nombre c tel que $c+(-a-b) = 0$. Puisqu'on affirme que ce nombre est $-(-a-b) = a+b$, il suffit de vérifier que $(a+b)+(-a-b) = 0$.

Or nous avons vu en cours que soustraire revient à additionner l'opposé et donc, en utilisant tour à tour l'associativité, la commutativité, et la définition de l'opposé, on obtient :

$$\begin{aligned}(a+b)+(-a-b) &= (a+b)+[-a+(-b)]\\ &= (a+b)+[(-b)+(-a)]\\ &= [(a+b)+(-b)]+(-a)\\ &= [a+(b+(-b))]+(-a)\\ &= a+(-a)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Lorsque $a=-7$ et $b=5$, on a par exemple $-a-b=-(-7)-5=7-5=2$. Son opposé est -2. Ceci correspond bien à la formule proposée puisque $a+b=-7+5=-2$.

Exercice 6

39. Plus c'est haut, plus c'est beau !

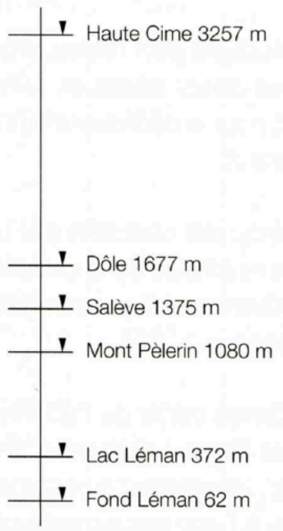
Tu possèdes suffisamment de renseignements pour déterminer l'altitude du fond du lac Léman :

- le sommet du Salève est 1003 m plus haut que le niveau du lac Léman et 1882 m plus bas que la Haute Cime des Dents du Midi ;
- le Mont Pèlerin culmine à 1080 m ;
- la différence d'altitude entre la Haute Cime et le fond du lac Léman est de 3195 m ;
- la Dôle domine le Salève de 302 m ;
- le niveau du lac Léman est 708 m plus bas que le sommet du Mont Pèlerin.

Enigme au cours de laquelle l'élève doit classer les informations fournies pour parvenir à la profondeur cherchée.

La donnée relative au sommet de la Dôle est superflue, mais il est important que les élèves apprennent à trier des données et à constater que certaines d'entre elles se révèlent parfois inutiles.

Le recours à un schéma facilite la résolution..



40. Un froid de canard !

Lundi, il a plu.

Mardi, il a fait moins chaud que vendredi, mais plus chaud que jeudi.

Mercredi, le thermomètre est descendu largement en dessous du zéro.

Jeudi, il a fait plus froid que mardi.

Vendredi, la température a été inférieure à celle de dimanche.

Samedi, il a fait un degré de plus que mardi.

Dimanche, l'eau de l'arrosoir, que j'avais oublié au fond du jardin, a gelé.

Quelle température a-t-il bien pu faire chaque jour de cette semaine ?

Point de départ pour l'introduction des nombres entiers relatifs.

L'énoncé est l'objet de plusieurs lectures avant la découverte de la nécessité d'un choix d'une température arbitraire pour l'une ou l'autre des journées. Cependant, ce choix est en étroite relation avec une information particulière : l'eau du jardin ayant gelé dimanche, il faisait 0° ou moins.

L'attribution d'une température fictive étant effectuée, les comparaisons à propos des affirmations de l'énoncé permettent de trouver, après quelques tâtonnements, des valeurs respectives satisfaisantes pour quatre autres jours de la semaine. Par exemple, pour une température de –5° associée au dimanche, on pourra successivement attribuer – 7° à vendredi, –10° à mardi, –12° à jeudi et –9° à samedi.

Les informations relatives aux deux derniers jours de la semaine étant indépendantes les unes des autres, il suffit de compléter en respectant la donnée : il a plu lundi, donc la température était supérieure à 0°, et mercredi la température est descendue largement au-dessous de 0°.

Le recours au modèle du thermomètre, sous la forme d'une droite numérique, peut s'avérer utile. Durant la mise en commun, il y a lieu de faire émerger la multiplicité des solutions et d'engager les élèves sur une comparaison des relations d'ordre des températures au sein de la semaine, pour chacune de leurs propositions.

Exercice 7

Partie 1. Nous montrons que dans n'importe quel anneau commutatif $(A, +, \cdot)$, l'élément neutre de l'addition, noté 0, est absorbant. Comme 0 est l'élément neutre de l'addition, on a

$$a + 0 = a$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$. En particulier, $0 + 0 = 0$. Donc pour tout $a \in A$ on a

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0,$$

où dans la deuxième égalité on a utilisé la distributivité de la multiplication sur l'addition. En additionnant l'opposé de $a \cdot 0$ aux deux côtés de l'équation, le côté gauche devient

$$a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) = 0$$

et le côté droit devient

$$\begin{aligned}(a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-(a \cdot 0)) &= a \cdot 0 + [a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))] \quad \text{(Associativité de l'addition)}\\ &= a \cdot 0 + 0\\ &= a \cdot 0 \quad \text{(élément neutre de l'addition).}\end{aligned}$$

Donc $0 = a \cdot 0$ pour tout $a \in A$, c'est-à-dire 0 est absorbant dans A.

Partie 2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $n|m$ et $n \neq 0$. Par définition le quotient $(+m) : (-n)$ est un nombre entier relatif a tel que $a \cdot (-n) = (+m)$. De plus on sait par le Corollaire 4.6 du Chapitre 3 que ce nombre a est unique.
Puisqu'on demande de prouver que le quotient est $[-(m : n)]$, il suffit de calculer $[-(m : n)] \cdot (-n)$ et de montrer qu'on obtient $(+m)$. Or, un produit de deux nombres entiers négatifs est positif par définition de la multiplcation :

$$[-(m : n)] \cdot (-n) = \{+[(m : n) \cdot n]\} = (+m)$$

par propriété de la division dans $\mathbb{N}$ pour la deuxième égalité.

Exercice 8

Corrigé

NO156 Des lettres et des opérations

a)

a + b	(a + b) + c	b + c	a + (b + c)
−90	−85	15	−85
120	115	15	115
12	9	−9	9
−24	−26	−10	−26

b)

a − b	(a − b) − c	b − c	a − (b − c)
−110	−115	5	−105
80	85	25	75
24	27	−3	21
−8	−6	−6	−10

c)

a · b	(a · b) · c	b · c	a · (b · c)
−1000	−5000	50	−5000
2000	−10 000	−100	−10 000
−108	324	18	324
128	−256	16	−256

d)

a : b	(a : b) : c	b : c	a : (b : c)
−10	−2	2	−50
5	−1	−4	−25
−3	1	2	9
2	−1	4	−4

On obtient les mêmes résultats dans les colonnes 2 et 4 de l'addition et de la multiplication.
C'est l'illustration que ces deux opérations sont associatives.

Exercice 9

a) $(-5) \cdot (+15) = -(5 \cdot 15) = (-75)$

b) $(-14) \cdot (+3) = -(14 \cdot 3) = (-42)$

c) $(+17) \cdot (+5) = +(17 \cdot 5) = (+85)$

d) $(-18) \cdot (-5) = +(18 \cdot 5) = (+90)$

e) $6 \cdot (+16) = +(6 \cdot 16) = (+96)$

f) $(-12) \cdot (-12) = +(12 \cdot 12) = (+144)$

g) $(+9) \cdot (-13) = -(9 \cdot 13) = (-117)$

h) $(-11) \cdot 12 = -(11 \cdot 12) = (-132)$

Exercice 10

a) $-975 : (-15) = +(975 : 15) = (+65)$

b) $-441 : 21 = -(441 : 21) = (-21)$

c) $756 : (-12) = -(756 : 12) = (-63)$

d) $1326 : 13 = +(1326 : 13) = (+102)$

e) $-2461 : 23 = -(2461 : 23) = (-107)$

f) $-2277 : (-11) = +(2277 : 11) = (+207)$

g) $8099 : 91 = +(8099 : 91) = (+89)$

h) $4312 : (-14) = -(4312 : 14) = (-308)$

Et pour terminer un exercice facultatif pour ceux qui ont encore envie de résoudre un problème.

Exercice 11

a)	Altitude lue (m)	Altitude réelle (m)	Lieu dit
1	–1081	1253	Pont-de-Nant
2	386	2720	Pacheu (haut)
3	–72	2262	Cabane de Plan Névé
4	–578	1756	La Vare
5	–854	1480	Derborence