Cours Euler: Série 1

20 août 2025

Remarque. La série de cette semaine est courte. On demande aussi de revoir les séries 1, 2, 3 et 4 de 2020 qui ont été étudiées pour préparer le test du mois de juin, surtout les exercices qui concernent la théorie des ensembles et les nombres entiers naturels.

Exercice 1

Démontre en t'inspirant de la démonstration vue au cours qu'un nombre naturel à 5 chiffres est divisible par 3 si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3. On utilisera a pour le nombre de 10 000, b pour les milliers, c pour les centaines, d pour les dizaines et e pour les unités.

Attention : On demande de démontrer un « si et seulement si », il y a donc deux implications à montrer.

Exercice 2

Démontre le critère de divisibilité par 5 : Si n est un nombre qui se termine par zéro ou 5, alors n est divisible par 5.

Exercice 3

Démontre qu'un nombre à trois chiffres $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ est divisible par 11 si et seulement si $a - b + c$ vaut zéro ou 11.

Exercice 4

On s'intéresse à l'expression $A \cup (B \cap C)$. Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble X.

1) Dessine un diagramme de Venn en hachurant $B \cap C$ d'une couleur et A d'une autre pour visualiser le sous-ensemble $A \cup (B \cap C)$.
2) Sur un autre diagramme de Venn, fais de même pour les sous-ensembles $A \cup B$ et $A \cup C$ afin de visualiser $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
3) Démontre que tout élément de $A \cup (B \cap C)$ est un élément de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4) Démontre que tout élément de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ est un élément de $A \cup (B \cap C)$.
5) Conclus par le principe de la double inclusion que $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.
6) Est-ce que cette égalité de sous-ensembles admet un analogue dans $\mathbb{N}$ (en remplaçant $\cup$ par $+$ et $\cap$ par $\cdot$) ?

Tourne la page !

Exercice 5

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}$. On veut démontrer que $m \cdot (n : k) = (m \cdot n) : k$ quand cela a un sens.

1) Détermine sous quelles conditions les expressions $m \cdot (n : k)$ et $(m \cdot n) : k$ existent. On rappelle qu'il n'est pas toujours possible de diviser un nombre entier par un autre dans $\mathbb{N}$.

2) Lorsque k divise n, démontre que $m \cdot (n : k) = (m \cdot n) : k$ en t'inspirant des preuves faites dans le cours.

Exercice 6

Soit X l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$.

1) Donne la liste de tous les sous-ensembles de X constitués de deux éléments.

2) Sans établir la liste explicitement, explique pourquoi il y a exactement le même nombre de sous-ensembles de X constitués de trois éléments.

3) Combien y a-t-il de sous-ensembles constitués d'un élément ? de quatre éléments ?

4) Combien y a-t-il de sous-ensembles dans X ? Et combien y a-t-il d'éléments dans $\mathcal{P}(X)$?

Exercice 7

Calcule dans chacun des cas le pgdc et le ppmc des nombres suivants en utilisant la méthode de factorisation :

1) 135 et 324 ;

2) $60, 84$ et 140 ;

3) $1'000'000$ et 240 ;

4) 270 et 315.

Exercice 8

Dans un restaurant, on a deux réservations de groupes pour la soirée : un groupe de 24 personnes et un groupe de 84 personnes. On souhaite les répartir à des tables où pourront s'asseoir le plus de personnes possible ensemble, d'un seul groupe. On veut qu'il y ait le même nombre de personnes à chaque table. Combien y aura-t-il de personnes assises à chaque table ?

Exercice 9

Soit a et b deux nombres entiers naturels. Démontre que $a \cdot b = \text{pgdc}(a, b) \cdot \text{ppmc}(a, b)$.