Série 9: Solutions

1 Filtrer avant d'échantillonner

a) La bande passante du signal est infinie, car celui-ci possède un nombre infini de fréquences nf_0 allant jusqu'à l'infini et toutes les amplitudes a_n des harmoniques correspondantes sont supposées strictement positives ici. Bien sûr, ceci est un peu théorique, car la valeur de a_n décroît rapidement avec n; les harmoniques correspondant à de grandes valeurs de n sont donc à peine audibles en pratique (aussi parce que notre oreille ne perçoit simplement pas les fréquences au-delà de 22 kHz).

b) Pour assurer que la condition d'échantillonnage soit satisfaite, il faut que $f_e > 2B$, où B est la bande passante du signal après filtrage.

1. Si $f_0 = 440$ Hz et $f_e = 44.1$ kHz, il faut que $B < 22.05$ kHz: en filtrant le signal avec une fréquence de coupure f_c comprise entre 22 kHz et 22'439 Hz, on s'assure de préserver les 50 premières harmoniques jusqu'à $f_{50} = 22$ kHz, tout en évitant l'effet stroboscopique lors de la reconstruction. Remarquez qu'il n'y a pas besoin que $f_e > 2f_c$, car le signal ne contient aucune composante entre 22 kHz et 22'439 Hz; on peut donc filtrer celui-ci avec n'importe quelle fréquence de coupure f_c dans cette intervalle.

2. Avec le même raisonnement, on conclut qu'avec une fréquence de coupure f_c comprise entre 21'780 Hz et 22'274 Hz, on préserve les 44 premières harmoniques du signal.

3. Encore avec le même raisonnement, on conclut qu'avec une fréquence de coupure f_c comprise entre 4'290 Hz et 4'619 Hz, on préserve les 13 premières harmoniques du signal.

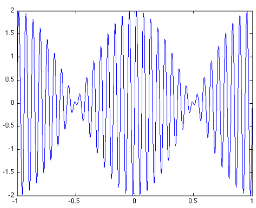
c) Pour échantilonner correctement le signal, il faut utiliser une fréquence d'échantillonnage juste au-dessus de 6'800 Hz (disons égale à ce chiffre pour simplifier), donc le nombre de bits à enregistrer est de 300 (secondes) $\times$ 6'800 $\times$ 64 = 130'560'000 bits $\simeq$ 130 Mégabits.

2 Accordage de guitare et phénomène dit de "battement"

a) Lorsque $f_2 = f_1 + \varepsilon$, avec ε petit mais non nul, on trouve que (cf. le rappel de trigonométrie)

$$\begin{aligned} X_1(t) + X_2(t) &= \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) = 2\cos(\pi(f_2 - f_1)t)\,\sin(\pi(f_1 + f_2)t) \\ &= 2\cos(\pi\varepsilon t)\,\sin(\pi(2f_1 + \varepsilon)t). \end{aligned}$$

Cette onde est donc faite d'une composante qui oscille lentement ($\cos(\pi\varepsilon t)$) et d'une autre qui oscille rapidement ($\sin(\pi(2f_1 + \varepsilon)t)$). Elle ressemble à ceci (pour $f_1 = 16$Hz et $f_2 = 17$Hz):



C'est la composante qui oscille lentement que l'on entend clairement à l'oreille.

b) Lorsque $f_2 = f_1$, l'onde résultante est simplement:

$$X_1(t) + X_2(t) = \sin(2\pi f_t) + \sin(2\pi f_1 t) = 2\,\sin(2\pi f_1 t).$$

Dans ce cas, l'amplitude est doublée (remarquez qu'on avait aussi un facteur 2 dans le premier cas), mais on n'entend pas de battement.

Une illustration intéressante du phénomène de battement est disponible ici:
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Battement_binaural`

3 Formule d'interpolation

a) Pour calculer $Y(nT_e)$, on remplace t par nT_e dans l'expression donnée dans l'énoncé, pour obtenir:

$$\begin{aligned} Y(nT_e) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\, F\left(\frac{nT_e - mT_e}{T_e}\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\, F(n-m) \\ &= \cdots + 0 + \cdots + 0 + X(nT_e)\cdot 1 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = X(nT_e) \end{aligned}$$

car on a supposé que $F(0) = 1$ et $F(k) = 0$ pour tout nombre entier k non-nul.

b) Vu que la fonction F donnée dans l'énoncé satisfait les hypothèses de la partie a) (à savoir $F(0) = 1$ et $F(k) = 0$ pour tout les entiers k non-nuls), on sait déjà que $Y(nT_e) = X(nT_e)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En particulier: $Y(0) = X(0)$ et $Y(T_e) = X(T_e)$. Voyons maintenant ce que vaut $Y(t)$ pour $0 < t < T_e$ (le raisonnement est le même pour tout autre intervalle):

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\, F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\, F\left(\frac{t}{T_e} - m\right) \\ &= X(0)\, F\left(\frac{t}{T_e}\right) + X(T_e)\, F\left(\frac{t}{T_e} - 1\right) \end{aligned}$$

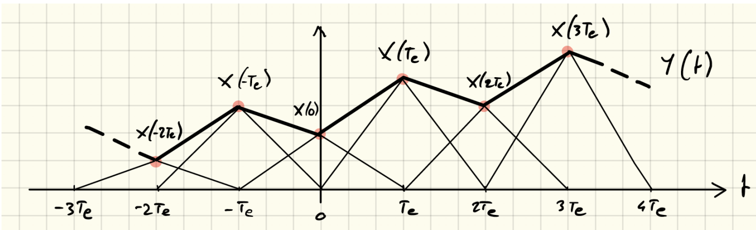
En effet, remarquez que vu que $F(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \geq 1$, il est aussi vrai que $F\left(\frac{t}{T_e} - m\right) = 0$ lorsque $0 < t < T_e$ et m est différent de 0 ou 1. Finalement, en utilisant le fait que

$$F(t) = 1 - t \quad \text{pour } 0 < t < 1 \quad \text{et} \quad F(t) = 1 + t \quad \text{pour } -1 < t < 0$$

on conclut que pour $0 < t < 1$:

$$Y(t) = X(0)\left(1 - \frac{t}{T_e}\right) + X(T_e)\left(1 + \frac{t}{T_e} - 1\right) = X(0) + (X(T_e) - X(0))\,\frac{t}{T_e}$$

qui représente bien l'équation d'une droite allant du point $(0, X(0))$ au point $(T_e, X(T_e))$. On peut voir aussi ce résultat graphiquement:



où on voit que le signal sortant $Y(t)$ est une somme de triangles et que dans chaque intervalle $[mT_e, (m+1)T_e]$, $Y(t)$ est la somme de deux droites, et donc également une droite.

c) Dans ce cas, $X(t)$ est une sinusoïde de fréquence $f = 314/2\pi$ qui est juste un peu plus petite que 50 Hz (car $2\pi = 6.28318...$); ici, f est aussi la bande passante de $X(t)$. D'un autre côté, $f_e = 1/T_e = 100$ Hz. La condition du théorème d'échantillonnage ($f_e > 2f$) est donc satisfaite et le signal reconstruit $X_I(t) = X(t) = \cos(314\,t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Note: Il est bien sûr aussi vrai que $X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \cos(314\,mT_e)\ \mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$, mais pourquoi utiliser une formule si compliquée quand il y en a une autre beaucoup plus simple?

d) La bonne réponse est la réponse (B): la formule d'interpolation modifiée proposée dans l'énoncé n'est rien d'autre que la formule d'interpolation classique avec une période d'échantillonnage modifiée $\widetilde{T}_e = 2T_e$. La fréquence d'échantillonnage correspondante est donc $\widetilde{f}_e = f_e/2$, et la condition correspondante dans le théorème d'échantillonnage est $\widetilde{f}_e > 2f_{\max}$, c'est-à-dire $f_e > 4f_{\max}$.