Série 7: Solutions

1 Que fait ce circuit?

L'expression logique pour la sortie de ce circuit est:

$$s = (x_1 \text{ OU } x_2) \text{ OU } (\text{NON } x_1 \text{ ET NON } x_2) = (x_1 \text{ OU } x_2) \text{ OU } (\text{NON } (x_1 \text{ OU } x_2))$$

qui vaut 1 pour toutes les valeurs d'entrée x_1 et x_2!

2 Additionneur avec retenue en entrée

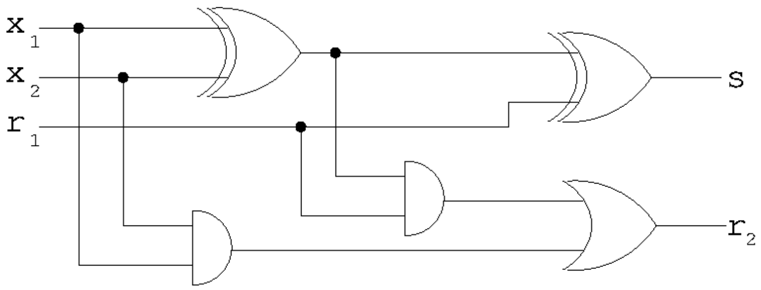
Remarquer tout d'abord que

$$s = x_1 \oplus x_2 \oplus r_1 = (x_1 \oplus x_2) \oplus r_1$$

et que

$$r_2 = (x_1 \text{ ET } x_2) \text{ OU } ((x_1 \oplus x_2) \text{ ET } r_1))$$

De là, on déduit le circuit:



3 Comparateur

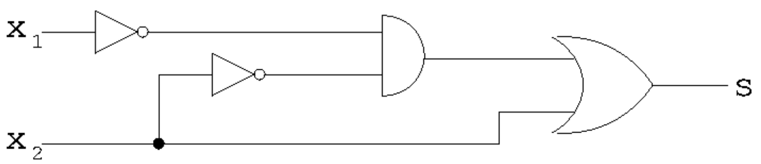
Observer tout d'abord que $x_1 \leq x_2$ si et seulement si

$$(x_2 = 1) \text{ OU } (x_1 = 0 \text{ ET } x_2 = 0)$$

On veut donc que la sortie du circuit soit donnée par

$$s = x_2 \text{ OU } (\text{NON } x_1 \text{ ET NON } x_2)$$

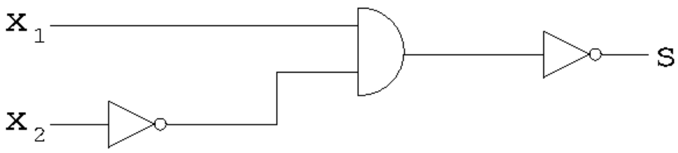
ce qui se traduit ainsi graphiquement:



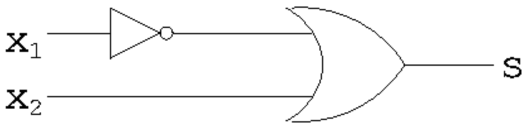
Une autre possibilité qui utilise une porte logique de moins est de remarquer que $x_1 \leq x_2$ si et seulement s'il n'est PAS vrai que $x_1 > x_2$, et donc qu'on cherche un circuit dont la sortie soit donnée par

$$s = \text{NON } (x_1 \text{ ET NON } x_2)$$

ce qui se traduit ainsi graphiquement:



Et une troisième possibilité, encore meilleure, est la suivante: $s = x_2$ OU (NON x_1), ce qui se traduit graphiquement par:



4 Une porte logique construite avec des transistors

a) En analysant le circuit, on voit que:

- si A et B valent 0 (i.e., qu'une tension basse est appliquée à la base de tous les transistors), alors le courant passe seulement dans les transistors du haut de la figure, et donc la tension à la sortie vaut Vdd, c'est-à-dire 1.

- si A vaut 0 et B vaut 1 (ou le contraire), alors le courant passe dans un des transistors du haut de la figure (et aussi dans un de ceux du bas, mais pas dans les deux), et donc la tension à la sortie vaut à nouveau 1.

- si A et B valent 1, alors le courant passe seulement dans les deux transistors du bas de la figure, et donc la tension à la sortie vaut Vss, c'est-à-dire 0.

La table de vérité de ce circuit est donc:

A	B	Out
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ce qui correspond à une porte "NON ET" (i.e., la négation de la porte ET).

b) Voici comment faire:

NON x = NON ET(x,x)

x_1 ET x_2 = NON (NON ET(x_1,x_2))

Note: La porte NON est celle construite à la ligne précédente !

x_1 OU x_1 = NON ET (NON x_1, NON x_2)

Note: A nouveau, la porte NON est celle construite à la première ligne.

5 Pour le plaisir: deviner deux nombres en une seule évaluation*

Après l'application des deux transformations de Hadamard, l'état de sortie vaut

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big((-1)^{f(0,0)}\,H\,|0\rangle\otimes H\,|0\rangle+(-1)^{f(0,1)}\,H\,|0\rangle\otimes H\,|1\rangle+(-1)^{f(1,0)}\,H\,|1\rangle\otimes H\,|0\rangle+(-1)^{f(1,1)}\,H\,|1\rangle\otimes H\,|1\rangle\Big)\\
&=\frac{1}{2}\Big((-1)^{f(0,0)}\,|+\rangle\otimes|+\rangle+(-1)^{f(0,1)}\,|+\rangle\otimes|-\rangle+(-1)^{f(1,0)}\,|-\rangle\otimes|+\rangle+(-1)^{f(1,1)}\,|-\rangle\otimes|-\rangle\Big)\\
&=\frac{1}{4}\Big((-1)^{f(0,0)}\Big(|0,0\rangle+|0,1\rangle+|1,0\rangle+|1,1\rangle\Big)+(-1)^{f(0,1)}\Big(|0,0\rangle-|0,1\rangle+|1,0\rangle-|1,1\rangle\Big)\\
&\quad+(-1)^{f(1,0)}\Big(|0,0\rangle+|0,1\rangle-|1,0\rangle-|1,1\rangle\Big)+(-1)^{f(1,1)}\Big(|0,0\rangle-|0,1\rangle-|1,0\rangle+|1,1\rangle\Big)\Big)
\end{aligned}$$

En réordonnant un peu tout ça, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^{f(0,0)}+(-1)^{f(0,1)}+(-1)^{f(1,0)}+(-1)^{f(1,1)}}{4}\,|0,0\rangle+\frac{(-1)^{f(0,0)}-(-1)^{f(0,1)}+(-1)^{f(1,0)}-(-1)^{f(1,1)}}{4}\,|0,1\rangle\\
&+\frac{(-1)^{f(0,0)}+(-1)^{f(0,1)}-(-1)^{f(1,0)}-(-1)^{f(1,1)}}{4}\,|1,0\rangle+\frac{(-1)^{f(0,0)}-(-1)^{f(0,1)}-(-1)^{f(1,0)}+(-1)^{f(1,1)}}{4}\,|1,1\rangle
\end{aligned}$$

En remplaçant maintenant f par son expression $f(x_1,x_2)=a_1\,x_1\oplus a_2\,x_2$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{1+(-1)^{a_2}+(-1)^{a_1}+(-1)^{a_1\oplus a_2}}{4}\,|0,0\rangle+\frac{1-(-1)^{a_2}+(-1)^{a_1}-(-1)^{a_1\oplus a_2}}{4}\,|0,1\rangle\\
&+\frac{1+(-1)^{a_2}-(-1)^{a_1}-(-1)^{a_1\oplus a_2}}{4}\,|1,0\rangle+\frac{1-(-1)^{a_2}-(-1)^{a_1}+(-1)^{a_1\oplus a_2}}{4}\,|1,1\rangle
\end{aligned}$$

Et vous pouvez alors vérifier que

- l'état de sortie vaut $|0,0\rangle$ si et seulement $a_1=a_2=0$
- l'état de sortie vaut $|0,1\rangle$ si et seulement $a_1=0$ et $a_2=1$
- l'état de sortie vaut $|1,0\rangle$ si et seulement $a_1=1$ et $a_2=0$
- l'état de sortie vaut $|1,1\rangle$ si et seulement $a_1=a_2=1$

En résumé, l'état de sortie vaut $|a_1,a_2\rangle$, i.e., ce qu'on cherche!