

Analyse avancée II – Série 12B

Exercice 1.

Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{xy^2}{(x^2 + y^4)^{\frac{3}{2}}}$. Alors

- $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y) = y$
- $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y) = 0$
- $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y) = 1$
- $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y)$ n'existe pas

Exercice 2.

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors

- f n'est pas continue en $(0, 0)$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas
- f est différentiable en $(0, 0)$
- f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

Exercice 3.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$. Alors $\int_D \frac{\tan(y)}{x^2 + y^2 + 1} dx dy > 1$.

- VRAI FAUX

Exercice 4.

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (\cos(xz), \sin(y - z))^T$. Alors la matrice jacobienne $J_f(x, y, z)$ de f évaluée au point $\mathbf{p} = (1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ est :

$J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.

Soit $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $h(u, v) = (-u(1-2v), u^2(1-v), uv)^T$ et soit $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z)$, une fonction de classe C^1 . Alors la dérivée partielle par rapport à v de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(u, v) = g(h(u, v))$, satisfait en $(u, v) = (1, 0)$:

$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = 2\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0, 0) - \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 0) + \frac{\partial g}{\partial z}(1, 0, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = -\frac{\partial g}{\partial x}(-1, 1, 0) + 2\frac{\partial g}{\partial y}(-1, 1, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = 2\frac{\partial g}{\partial x}(-1, 1, 0) - \frac{\partial g}{\partial y}(-1, 1, 0) + \frac{\partial g}{\partial z}(-1, 1, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(-1, 1, 0) - 2\frac{\partial g}{\partial y}(-1, 1, 0) + \frac{\partial g}{\partial z}(-1, 1, 0)$

Exercice 6.

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x - y - x^2 + y^3$ et soit le point $\mathbf{p} = (-2, 1)$. Alors le plan tangent au graphe de f en $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$ est donné par l'équation :

$z - 5x - 2y + 6 = 0$

$z - 5x - 2y - 2 = 0$

$z - 5x - 2y - 8 = 0$

$z - 2x - 5y + 7 = 0$

Exercice 7.

L'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \neq 0\}$ est fermé.

VRAI FAUX

Exercice 8.

Le polynôme de Taylor d'ordre deux de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = e^{x^2+y-1}$$

au point $(1, 0)$ est :

- $p_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + y + 6(x - 1)^2 + 4(x - 1)y + y^2$
- $p_2(x, y) = -1 + 2(x - 1) + y + 3(x - 1)^2 + 2(x - 1)y + \frac{1}{2}y^2$
- $p_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + y + 3(x - 1)^2 + 2(x - 1)y + \frac{1}{2}y^2$
- $p_2(x, y) = 1 + 2x + y + 3x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2$

Exercice 9.

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 2x^2y^3z^4 + 2x^3y^2 - 3y^2z - 1$ et soit $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$. Puisque $f(\mathbf{p}) = 0$, et $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \neq 0$, l'équation $f(x, y, z) = 0$ définit dans un voisinage de $(y, z) = (1, 1)$ une fonction $x = g(y, z)$ qui satisfait $g(1, 1) = 1$ et $f(g(y, z), y, z) = 0$ ainsi que :

- $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -\frac{1}{2}$
- $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = \frac{1}{2}$
- $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -2$
- $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -\frac{4}{5}$

Exercice 10.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 1 \text{ et } y > -1\}$ et soit la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$. Alors un vecteur \mathbf{v} dans la direction perpendiculaire à la ligne de niveau de f qui passe par le point $(2, 0)$ est :

- $\mathbf{v} = (-4, 1)^T$
- $\mathbf{v} = (1, -4)^T$
- $\mathbf{v} = (4, 1)^T$
- $\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{4}, -1\right)^T$

Exercice 11.

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 2y + 1$. Alors le point $\mathbf{p} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$

- est un point de maximum local de f
- n'est pas un point stationnaire de f
- est un point selle de f
- est un point de minimum local de f

Exercice 12.

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$. La valeur maximale de f sous la contrainte $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4 = 0$ est :

- 1
- $\sqrt{2}$
- 0
- $-\sqrt{2}$

Exercice 13.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$ et soit la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = y + 2x$. Alors le maximum absolu $M = \max_{(x,y) \in D} f(x, y)$ de f sur D et le minimum absolu $m = \min_{(x,y) \in D} f(x, y)$ de f sur D satisfont :

- $M = \sqrt{5}$ et $m = 0$
- $M = \sqrt{5}$ et $m = -\sqrt{5}$
- $M = \sqrt{5}$ et $m = -1$
- $M = 1$ et $m = -1$

Exercice 14.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16, y \geq 0, x \leq 0\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D x y \, dx \, dy$$

vaut :

- 3π
- 30
- -30
- 0

Exercice 15.

La solution $u(t)$ de l'équation différentielle $u'' - 4u' + 5u = 8 \sin(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $u(0) = 2$ et $u'(0) = 5$ est :

- $u(t) = -\sin(t)(2e^{2t} + 1) + \cos(t)(e^{2t} + 1)$
 $u(t) = \sin(t)(2e^{2t} + 1) + \cos(t)(e^{2t} + 1)$
 $u(t) = \sin(t)(4e^{2t} - 1) + \cos(t)(e^{2t} + 1)$
 $u(t) = \sin(t)(2e^{2t} + 1) - \cos(t)(e^{2t} + 1)$

Exercice 16.

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $(x^2 + 9)y' + xy - xy^2 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{4}$ satisfait aussi :

- $y(4) = 6$
 $y(4) = 1$
 $y(4) = \frac{1}{6}$
 $y(4) = -\frac{1}{4}$

Exercice 17.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 f(x, y) dy \right) dx$$

est égale à :

- $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$
 $\int_{-1}^1 \left(\int_{-y^2}^{y^2} f(x, y) dx \right) dy$
 $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$
 $\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$

Exercice 18.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles ouverts et $f: A \rightarrow B$ une fonction bijective avec f et f^{-1} de classe C^1 . Alors pour tout $\mathbf{p} \in A$ on a $\det(J_f(\mathbf{p})) \neq 0$.

- VRAI FAUX

Exercice 19.

Soient p, q et g des fonctions continues de $I \rightarrow \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, et soit $L(u) = u'' + p u' + q u$. Si u_h est solution de l'équation différentielle $L(u) = 0$ et u_p est solution de l'équation différentielle $L(u) = g$, alors $u_p + \frac{1}{2}u_h$ est solution de l'équation différentielle $L(u) = g$.

VRAI FAUX

Exercice 20.

Soit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 1$. Si pour tout $\varphi \in [0, 2\pi[$ fixé on a $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = 1$, alors f est continue en $(0,0)$.

VRAI FAUX

Exercice 21.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p})$ pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$.

VRAI FAUX

Exercice 22.

Soit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est différentiable en tout point de \mathbb{R}^2 , alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

VRAI FAUX

Exercice 23.

Soient $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ deux fonctions de classe C^1 . Alors la fonction $h = g \circ f$ est de classe C^1 et on a pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ que $J_h(\mathbf{p}) = J_g(f(\mathbf{p})) J_f(\mathbf{p})$.

VRAI FAUX

Exercice 24.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe C^2 . Alors pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{h}$$

VRAI FAUX

Exercice 25.

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local en \mathbf{p} , alors \mathbf{p} est un point stationnaire de f .

VRAI FAUX

Exercice 26.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Si \mathbf{p} est un point stationnaire de f et si le déterminant de la matrice hessienne $H_f(\mathbf{p})$ est strictement négatif, alors f admet un maximum local en \mathbf{p} .

VRAI FAUX

Exercice 27.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, une fonction qui est différentiable en un point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Alors le vecteur $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), -\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), -\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}), 1\right)^T$ est perpendiculaire à l'hyperplan tangent au graphe de f en $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$.

VRAI FAUX

Exercice 28.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble borné et fermé $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et fermé. Si $G: \tilde{D} \rightarrow D$ est une fonction bijective de classe C^1 alors on a :

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{D}} f(G(u, v)) |\det (J_G(u, v))| du dv$$

VRAI FAUX

Exercice 29.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Alors la dérivée directionnelle de f en $(0, 0)$ suivant le vecteur $v = (1, 1)^T$ est égale à la limite :

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ (h,k) \neq (0,0)}} \frac{f(h, k) - f(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

VRAI FAUX

Exercice 30.

Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble borné et fermé. Si f n'admet pas de maximum absolu sur D , alors f n'est pas continue sur D .

VRAI FAUX