Question 23 (voir la série 4B)

a) S'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $y_1(x) = c\, y_2(x)$ alors $\forall x \in I$, $w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = c\,0 = 0$.

b) On a $w' = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1y_2'' - y_1''y_2 = -y_1\,(p(x)y_2' + q(x)y_2) + (p(x)y_1' + q(x)y_1)\,y_2 = -p(x)w$ et donc (théorème d'Abel) :

$$w(x) = c\,\mathrm{e}^{-P(x)}$$

avec P une primitive de p et c une constante. Donc ou bien le Wronskien est non-nul ou identiquement nul sur I. De plus, si $w(x_0) = 0$, alors

$$w(x_0) = \det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} = 0,$$

les deux colonnes de la matrices sont linéairement dépendantes. Il existe donc $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, pas les deux nulles, telles que $c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = 0$ et $c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = 0$. Soit maintenant $y = c_1y_1 + c_2y_2$ par construction $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ et y satisfait l'équation différentielle homogène, et par le théorème d'existence et d'unicité, $\forall x \in I$, $y(x) = 0$. Ceci montre que y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.

c) Par le théorème d'existence et d'unicité il existent des solutions y_1 et y_2 telles que pour un $x_0 \in I$ $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$ et $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$. Vu que $w(x_0) = 1 \neq 0$ les deux solutions sont linéairement indépendantes et la dimension de l'espace vectoriel est donc au moins deux. Soit y_3 une autre solution et soit la combinaison linéaire suivante de y_1 et y_2 : $y = y_3(x_0)y_1 + y_3'(x_0)y_2$. On a $y(x_0) = y_3(x_0)$ et $y'(x_0) = y_3'(x_0)$ et donc $y_3 = y$ par l'unicité des solutions. La dimension de l'espace des solutions est donc deux.

Question 24

$$y' = e^{x+y} = e^x e^y.$$

$$e^{-y}\,dy = e^x\,dx$$

$$-e^{-y} = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$y = -\ln(-e^x - C), \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y_0 = y(x_0) = -\ln(-e^{x_0} - C).$$

$$-e^{-y_0} = e^{x_0} + C \Rightarrow C = -e^{x_0} - e^{-y_0}.$$

$$\boxed{y(x) = -\ln(e^{-y_0} + e^{x_0} - e^x).}$$

Solution maximale

$$e^{-y_0} + e^{x_0} - e^x > 0$$

$$e^{-y_0} + e^{x_0} > e^x.$$

$$x < \ln(e^{x_0} + e^{-y_0}).$$

$$\boxed{\begin{gathered} y(x) = -\ln(e^{-y_0} + e^{x_0} - e^x) \\ x \in \left]-\infty, \ln(e^{x_0} + e^{-y_0})\right[. \end{gathered}}$$

Question 25

- D un ensemble compact (borné + fermé).
- f une fonction continue.
- f admet un minimum (absolu) m, et un maximum absolue M.
- f est connexe par arc (sans démonstration)

Image de f = $[m, M]$

Trouver m et M

Dans $\mathring{D}$ $\quad \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x^2+y^2+z^2<1$

$z>0$. $\underset{(*)}{\Rightarrow}$ $x=y=0$ $\Rightarrow$ $f(x,y,z) = \boxed{0.}$

sur ∂D

a) regarder sur la surface de la sphere, puis $z \geq 0$

$$F(x,y,z) = x \cdot y \cdot z - \lambda \cdot (x^2+y^2+z^2-1).$$

① $y \cdot z - 2\lambda x = 0$ $\underset{x \neq 0}{\Rightarrow}$ $\lambda = \dfrac{yz}{2x}$

② $xz - 2\lambda y = 0$

③ $xy - 2\lambda z = 0$

④ $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$.

② $\quad x \cdot z - \dfrac{y^2 z}{x} = 0 \underset{z \neq 0}{\Rightarrow} x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y.$

③ $\quad x \cdot y = \frac{y z^2}{x} \underset{y \neq 0}{\Longrightarrow} x^2 = z^2 \Rightarrow x = \pm z.$

④ $\quad 3x^2 = 1 \quad , \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pm \frac{3\sqrt{3}}{3^3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{9} = \boxed{\pm \frac{1}{3\sqrt{3}}}$$

b) <u>sur $z=0$, $x^2+y^2 \leq 1$</u> $= D_0$

A priori il faudrait regarder à l'intérieur de D_0, puis sur le cercle $z=0$, $x^2+y^2=1$, mais

$$f(x,y,0) \boxed{=0} \text{ sur } D_0$$

<u>Conclusion:</u>

$m = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $\quad M = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

$$\boxed{\text{Image} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right]}$$

Question 2.6

A montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, t.q. $\forall x, y \in C$

$$\|x-y\| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Par l'absurde

Si f n'était pas absolument continue sur C, alors :

$\exists \varepsilon > 0$, t.q. $\forall \delta > 0$, $\exists x, y \in C$

$$\|x-y\| \leq \delta \text{ et } |f(x)-f(y)| > \varepsilon.$$

Donc $\exists \varepsilon > 0$ t.q. pour $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$

$\exists x_k, y_k$ t.q. $\|x_k - y_k\| \leq \frac{1}{k}$ et $|f(x_k) - f(y_k)| > \varepsilon$.

De $(x_k)_{k \geq 0}$, par le théorème de B.-Z.

on peut extraire une sous-suite $(x_{k_j})_{k \geq 0}$

t.q. $\lim_{j \to \infty} x_{k_j} = x \in C$ (car C fermé).

et on a.

$$\|y_{k_j} - x\| \leq \|y_{k_j} - x_{k_j}\| + \|x_{k_j} - x| \leq \frac{1}{k_j} + \|x_{k_j} - x\|$$

et donc $\lim_{j \to \infty} y_{k_j} = x \in C$.

Par la continuité de f sur C on a.

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(x) = \lim_{j\to\infty} f(y_{k_j}).$$

Ce qui contredit le fait que. $\forall j$

$$|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| > \varepsilon.$$

f est donc bien uniformement continue.

Question 27

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors. (avec $\| \ \| \equiv \| \ \|_{2,2}$)

$$\|A^k x\| \leq \|A\| \, \|A^{k-1}x\| \leq \|A\|^k \|x\|$$

montrer par récurrence si demandé

$\Longrightarrow$

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k.$$

$$\|B_{k+1} - B_k\| = \|A^{k+1}\| \leq \|A\|^{k+1} \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1}$$

pourquoi ?

par hypothèse $\|A\| \leq \frac{1}{2}$

$\forall m \in \mathbb{N}^*$

$$\|B_{k+m} - B_k\| \leq \sum_{\ell=1}^{m} \|B_{k+\ell} - B_{k+\ell-1}\|$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{m} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+\ell} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} \sum_{\ell=1}^{m} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\ell-1}$$

$$\leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0$, t.q. $\forall k \geq k_0$, $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\|B_{k+m} - B_k\| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k_0} \leq \varepsilon.$$

$\left[\text{choose } k_0 \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{2})} + 1\right].$

Donc B_k une suite de Cauchy.