

- 3.1. (a) Le *demi-plan de Poincaré* est le domaine  $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  muni de la métrique Riemannienne

$$h = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

- (a) Calculer l'aire de la région  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < a, b < y\}$  pour cette métrique.  
(b) On identifie  $(x, y)$  à  $z = x + iy$ . Montrer que l'application (homographie) définie par

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

où  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  et  $ad - bc > 0$  est une isométrie pour la métrique  $h$ .

- (c) Trouver l'inverse de cette isométrie.  
(d) Montrer que l'application  $\varphi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  définie par

$$\varphi(z) = -i \cdot \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right)$$

est bi-holomorphe ( $\mathbb{D}^2$  est le disque unité  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ).

- (e) Calculer l'application inverse  $\varphi^{-1} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ .  
(f) Calculer la métrique riemannienne  $g = \varphi^*(h)$ .

Les variétés riemanniennes  $(\mathbb{H}^2, h)$  et  $(\mathbb{D}^2, h)$  sont donc isométriques. On appelle l'une ou l'autre le plan hyperbolique.

- 3.2. (a) Montrer que les équations des géodésiques du demi-plan de Poincaré  $\{(x, y) \mid y > 0\}$  avec la métrique  $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  s'écrivent

$$\ddot{x} = 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{y}, \quad \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y}.$$

- (b) Montrer que  $\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$  et  $\frac{\dot{x}}{y^2}$  sont des intégrales premières pour ces équations.

- 3.3. (a) Soit  $f : T\Omega = \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , un lagrangien autonome sur le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Montrer que si  $t \mapsto x(t)$  est une courbe extrémale pour l'action associée, alors

$$A(x, v) = v^i \frac{\partial f}{\partial v^i}(x, v) - f(x, v)$$

est une « intégrale première du mouvement » (cela signifie  $A(x(t), \dot{x}(t))$  est constante par rapport à  $t$ ).

- (b) Dédire de (a) que si le Lagrangien  $f(x, v)$  est autonome (i.e.  $f$  ne dépend pas de  $t$ ) et homogène de poids  $r \neq 1$  en  $v$ , alors la fonction  $f$  elle-même est une intégrale première (une fonction  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est *homogène* de poids  $r$  si  $h(\lambda v) = \lambda^r h(v)$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ); dans ce cas on a la *relation d'Euler*  $v^i \frac{\partial h}{\partial v^i} = rh(v)$  [écrire la preuve, qui est facile].

(c) Dédurre de (a) que si le Lagrangien est de la forme

$$f(x, v) = \frac{1}{2}m \cdot g_{ij}(x)v^i v^j - U(x),$$

où  $m$  est une constante,  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  et  $g_{ij}$  est une métrique riemannienne sur  $\Omega$ , alors

$$H(x, v) = \frac{1}{2}m \cdot g_{ij}(x)v^i v^j + U(x)$$

est une intégrale première.

- (d) (i) Expliquer le lien avec le « principe de conservation de l'énergie » de la mécanique analytique.
- (ii) Montrer que toute géodésique d'une variété riemannienne est parcourue à vitesse constante.
- (e) Montrer que si  $f(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$  ne dépend pas de la coordonnée  $x^i$ , alors  $\frac{\partial f}{\partial v^i}$  est une intégrale première du système (dans ce cas on dit que  $x^i$  est une *coordonnée cyclique* pour le Lagrangien  $f$  et que  $p^i = \frac{\partial f}{\partial v^i}$  est le *moment conjugué* de cette coordonnée).

**3.4.** Soit  $U \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert borné et  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction différentiable. La *graphe* de  $\varphi$  est par définition la sous-variété

$$S = S_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbf{R}^{n+1}.$$

On muni  $S_\varphi$  de la métrique Riemannienne induite par la métrique euclidienne standard de  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Prouver la formule de Cauchy :

$$\text{Vol}(S_\varphi) = \int_U \frac{dx}{|\cos(\theta(x))|},$$

où  $\theta(x)$  est l'angle entre un vecteur normal à  $S_\varphi$  et le vecteur  $\mathbf{e}_{n+1}$  au point  $(x, \varphi(x)) \in S_\varphi$ .