Série 10

1 L'entropie d'un jeu d'échecs

a) Parmi les 64 cases d'un échiquier standard, on en tire une au hasard de manière uniforme. On suppose également que les pièces (dames, rois, tours, fous, cavaliers et pions) sont placées dans leur position de départ:

Si vous utilisez une stratégie optimale, de combien de questions binaires *en moyenne* allez-vous avoir besoin pour deviner la nature de la pièce qui se trouve sur la case tirée au hasard? Il vous faut distinguer parmi les 13 possibilités suivantes:

dame noire, roi noir, tour noire, fou noir, cavalier noir, pion noir, dame blanche,
roi blanc, tour blanche, fou blanc, cavalier blanc, pion blanc, ou encore case vide

Il se trouve que dans ce cas précis, le nombre moyen de questions que vous posez correspond exactement à l'entropie du jeu d'échecs (avec les pièces en position de départ) donnée par la formule du cours

$$H(\mathcal{X}) = \sum_{j=1}^{n} p_j \log_2 \left(\frac{1}{p_j}\right) \tag{1}$$

où p_j est la probabilité d'apparition de la pièce numéro j sur l'échiquier (avec ici $n = 13$).

b) Supposons maintenant qu'on tire à nouveau une case au hasard sur un échiquier où quelques coups d'une partie ont déjà été joués:

A gauche, quelques pions ont simplement été déplacés, tandis qu'à droite, un pion blanc a été capturé et a donc disparu de l'échiquier.

Sans faire aucun calcul, déterminez pour chacun des cas ci-dessus si, par rapport à la position de départ, l'entropie du jeu a augmenté / est restée la même / a diminué.

2 Calcul d'entropie

Au moyen de la formule (1) de l'exercice 1, calculez l'entropie de la séquence de 20 lettres (inclus les espaces et le point d'exclamation):

HASTA LA VISTA BABY!

en écrivant tout d'abord le résulat sous la forme:

$$H = a + b\,\log_2(3) + c\,\log_2(5)$$

où a, b, c sont des fractions (positives ou négatives). Estimez ensuite le resultat en utilisant les approximations suivantes: $\log_2(3) \simeq 1.58$ et $\log_2(5) \simeq 2.32$.

3 Comparaisons d'entropies

a) Pour chaque paire de mots ci-dessous, estimer lequel des deux mots a la plus grande entropie, ou s'ils ont la même entropie. Pour cela, on peut bien sûr à chaque fois calculer les entropies des deux mots pour répondre, mais on peut aussi essayer de répondre sans faire de calculs, en raisonnant sur les probabilités d'apparition des lettres dans chaque mot (autre indice: à nombre égal de lettres, le mot qui donne le plus de possibilités de créer d'autres mots en réutilisant ses lettres est celui qui a la plus grande entropie).

1. EPFL et EEPPFFLL
2. MEDITERRANNEE et MEDETERRENNEE
3. AAAH et HAHA
4. ABB et ABBA
5. ACD et ACDC
6. ABR et ABRI
7. CALC et CALCUL

b) Voici des séquences de 16 lettres chacune (*inclus* les espaces). Ordonnez-les dans l'ordre croissant de leurs entropies respectives:

1. TRESSE AU BEURRE
2. PAIN AU CHOCOLAT
3. CROISSANT FOURRE
4. CHOUX A LA CREME
5. GATEAUX MILANAIS

4 Est-ce que l'entropie augmente ou diminue?

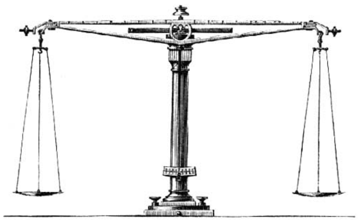
a) Considérons une séquence de lettres le longueur N finie. Est-il *toujours* vrai que si on ajoute à cette séquence une lettre qui fait déjà partie de la séquence, alors l'entropie de la nouvelle séquence (de longueur $N+1$) diminue?

b) Considérons une séquence de lettres le longueur N finie. Est-il *toujours* vrai que si on ajoute à cette séquence une lettre qui ne fait pas partie de la séquence, alors l'entropie de la nouvelle séquence (de longueur $N+1$) augmente?

Note: Pour répondre à chacune de ces deux questions ci-dessus, vous pouvez vous aider de l'exercice précédent. A chaque fois, il vous faut soit vous convaincre que c'est toujours vrai, à l'aide de plusieurs exemples (car la démonstration formelle est difficile et dépasse le cadre de ce cours), soit trouver un contre-exemple à l'affirmation énoncée.

5 Pour le plaisir: minimiser le nombre de pesées*

a) Vous avez devant vous 9 pièces de monnaie, identiques en apparence, mais quelqu'un vous dit que l'une d'elles est fausse et pèse un peu moins lourd que les autres. Pour identifier la fausse pièce, vous disposez d'une balance:



avec laquelle il est possible d'effectuer des pesées. Le résultat de chaque pesée peut être "la balance penche à gauche", "la balance penche à droite" ou "la balance reste stable".

En admettant que vous utilisez une stratégie optimale, quel est le nombre *minimum* de pesées qu'il vous faut exécuter pour identifier la fausse pièce? Et quelles sont ces pesées?

Indication: Commencez par le problème plus simple où vous n'avez que 3 pièces devant vous.

b) Supposons maintenant que vous ayez 4 pièces devant vous, et que l'on vous indique qu'*au plus* une d'entre elles est fausse, *sans vous dire si celle-ci est plus légère ou au contraire plus lourde que les autres.* Pour vous aider, vous avez cette fois une pièce additionnelle dans votre poche que vous savez être vraie et que vous pouvez utiliser pour les pesées.

En admettant que vous utilisez une stratégie optimale, quel est le nombre minimum de pesées qu'il vous faut exécuter (et à nouveau, quelles pesées effectuerez-vous?) pour être en mesure de répondre aux trois questions suivantes (prises ensemble): y a-t-il une fausse pièce? le cas échéant, quelle est-elle? et est-elle plus lourde ou plus légère que les autres?