

Série 9

Rappel de trigonométrie

Soient a, b, u, v des nombres réels. Alors on a les relations suivantes:

$$\cos(b) - \cos(a) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(b) - \sin(a) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

ou de manière équivalente:

$$2 \sin(u) \sin(v) = \cos(u-v) - \cos(u+v) \quad \text{et} \quad 2 \cos(u) \sin(v) = \sin(u+v) - \sin(u-v)$$

On rappelle également que $\cos(a) = \sin(a + \frac{\pi}{2})$, $\cos(a) = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$, $\cos(-a) = \cos(a)$, $\sin(-a) = -\sin(a)$ et $\sin'(a) = \cos(a)$.

1 Bande passante et fréquence d'échantillonnage

a) Soit $X(t) = \sum_{i=1}^n a_i \sin(2\pi f_i t)$ un signal de bande passante $B = \max(f_1, f_2, \dots, f_n)$. Quelle est la bande passante des signaux suivants?

1. $2X(t)$
2. $X(t-1)$
3. $X(3t)$
4. $X(t) + \sin(2\pi f t)$, avec $f \neq f_1, f_2, \dots, f_n$
5. $X'(t)$ [i.e., la dérivée de la fonction $X(t)$]

De manière correspondante, à quelle fréquence f_e recommanderiez-vous d'échantillonner chacun de ces signaux?

b) Soient maintenant $X(t)$ et $Y(t)$ deux signaux de la forme ci-dessus, avec bandes passantes B_X et B_Y , respectivement. *Que pouvez-vous dire* sur la bande passante des signaux suivants?

1. $X(t) + Y(t)$
2. $X(t) \cdot Y(t)$

De manière correspondante, à quelle fréquence f_e recommanderiez-vous d'échantillonner chacun de ces signaux?

2 Interlude musical

Durant une heure, on enregistre un concert de musique à l'aide d'un micro qui échantillonne le son à une fréquence de 44 kHz, et chaque échantillon est quantifié sur 32 bits. Quelle est la taille du fichier audio résultant (si on ignore ici toute autre forme de compression)?

3 Signaux périodiques et apériodiques

Un signal $X(t)$ est dit *périodique de période* $T > 0$ si T est la plus petite valeur possible pour laquelle $X(t) = X(t+T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (exemple: une sinusoïde pure de fréquence $f = 1/T$ est périodique de période T). Remarquer qu'on a alors également $X(t+kT) = X(t)$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$.

a) Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques de même période T . Est-ce que le signal $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique? Si oui, avec quelle période?

b) Soient encore $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques, mais cette fois avec deux périodes différentes T_1 et T_2 , respectivement. Si T_1 et T_2 sont des nombres entiers, est-ce que le signal $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique? Si oui, avec quelle période?

c) Un cas particulier: une note produite par un instrument de musique est composée d'une sinusoïde avec une fréquence fondamentale f_0 et d'autres sinusoïdes, appelées les *harmoniques*, dont les fréquences sont des multiples de f_0 . La note est donc un signal de la forme:

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

où le coefficient $a_n > 0$ est l'amplitude de la n^e harmonique (ce sont ces coefficients qui déterminent le *timbre* de l'instrument). Est-ce que ce signal est périodique? Si oui, avec quelle période?

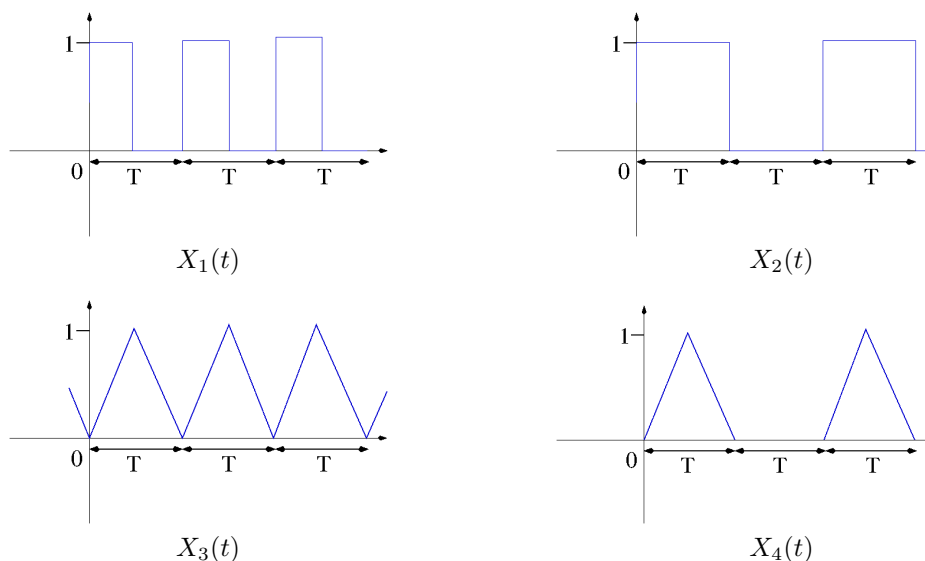
d) De manière plus générale, est-il toujours vrai que la somme $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique? (une justification formelle ne vous est pas demandée ici).

Indication: Pour avoir une meilleure idée de ce qui peut se passer, on peut chercher la réponse en représentant numériquement différents signaux. Essayez par exemple de représenter les deux signaux suivants sur le site www.desmos.com/calculator :

$$\text{"sin}(2 \text{ pi } t) + \text{cos}(4 \text{ pi } t) \text{ et "sin}(2 \text{ pi } t) + \text{cos}(4 t) \text{"}$$

4 Filtre à moyenne mobile

a) Comment les signaux suivants sont-ils transformés après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$?



Pas besoin ici de formules mathématiques pour répondre: des dessins suffiront!

b) Qu'arrive-t-il à un signal périodique de période T (voir exercice 3) après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de même période $T_c = T$?

c) Soit $X(t) = \sin(2\pi f t)$, une sinusoïde pure de fréquence f . Montrer qu'après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période T_c , l'amplitude du signal sortant $\hat{X}(t)$ satisfait l'inégalité

$$|\hat{X}(t)| \leq |\text{sinc}(f T_c)| \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

où on rappelle que $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ par définition.