

## Série 9

### Rappel de trigonométrie

Soient  $a, b, u, v$  des nombres réels. Alors on a les relations suivantes:

$$\cos(b) - \cos(a) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(b) - \sin(a) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

ou de manière équivalente:

$$2 \sin(u) \sin(v) = \cos(u-v) - \cos(u+v) \quad \text{et} \quad 2 \cos(u) \sin(v) = \sin(u+v) - \sin(u-v)$$

On rappelle également que  $\cos(a) = \sin(a + \frac{\pi}{2})$ ,  $\cos(a) = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$ ,  $\cos(-a) = \cos(a)$ ,  $\sin(-a) = -\sin(a)$  et  $\sin'(a) = \cos(a)$ .

### 1 Bande passante et fréquence d'échantillonnage

a) Soit  $X(t) = \sum_{i=1}^n a_i \sin(2\pi f_i t)$  un signal de bande passante  $B = \max(f_1, f_2, \dots, f_n)$ .  
Quelle est la bande passante des signaux suivants?

1.  $2X(t)$
2.  $X(t-1)$
3.  $X(3t)$
4.  $X(t) + \sin(2\pi ft)$ , avec  $f \neq f_1, f_2, \dots, f_n$
5.  $X'(t)$  [i.e., la dérivée de la fonction  $X(t)$ ]

De manière correspondante, à quelle fréquence  $f_e$  recommanderiez-vous d'échantillonner chacun de ces signaux?

b) Soient maintenant  $X(t)$  et  $Y(t)$  deux signaux de la forme ci-dessus, avec bandes passantes  $B_X$  et  $B_Y$ , respectivement. *Que pouvez-vous dire* sur la bande passante des signaux suivants?

1.  $X(t) + Y(t)$
2.  $X(t) \cdot Y(t)$

De manière correspondante, à quelle fréquence  $f_e$  recommanderiez-vous d'échantillonner chacun de ces signaux?

### 2 Interlude musical

Durant une heure, on enregistre un concert de musique à l'aide d'un micro qui échantillonne le son à une fréquence de 44 kHz, et chaque échantillon est quantifié sur 32 bits. Quelle est la taille du fichier audio résultant (si on ignore ici toute autre forme de compression)?

### 3 Signaux périodiques et apériodiques

Un signal  $X(t)$  est dit *périodique de période*  $T > 0$  si  $T$  est la plus petite valeur possible pour laquelle  $X(t) = X(t+T)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  (exemple: une sinusoïde pure de fréquence  $f = 1/T$  est périodique de période  $T$ ). Remarquer qu'on a alors également  $X(t+kT) = X(t)$  pour tous  $k \in \mathbb{Z}$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

a) Soient  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  deux signaux périodiques de même période  $T$ . Est-ce que le signal  $X_1(t) + X_2(t)$  est périodique? Si oui, avec quelle période?

b) Soient encore  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  deux signaux périodiques, mais cette fois avec deux périodes différentes  $T_1$  et  $T_2$ , respectivement. Si  $T_1$  et  $T_2$  sont des nombres entiers, est-ce que le signal  $X_1(t) + X_2(t)$  est périodique? Si oui, avec quelle période?

c) Un cas particulier: une note produite par un instrument de musique est composée d'une sinusoïde avec une fréquence fondamentale  $f_0$  et d'autres sinusoïdes, appelées les *harmoniques*, dont les fréquences sont des multiples de  $f_0$ . La note est donc un signal de la forme:

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

où le coefficient  $a_n > 0$  est l'amplitude de la  $n^e$  harmonique (ce sont ces coefficients qui déterminent le *timbre* de l'instrument). Est-ce que ce signal est périodique? Si oui, avec quelle période?

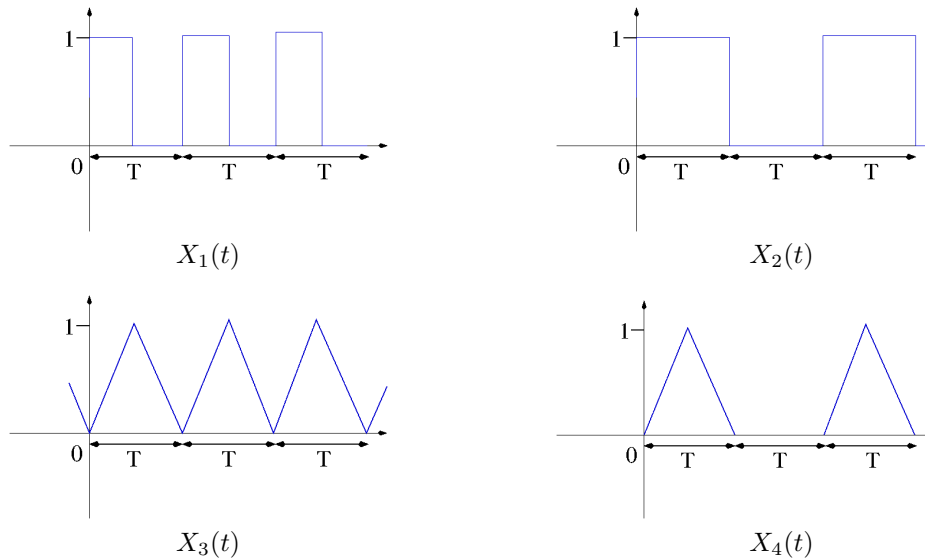
d) De manière plus générale, est-il toujours vrai que la somme  $X_1(t) + X_2(t)$  est périodique? (une justification formelle ne vous est pas demandée ici).

*Indication:* Pour avoir une meilleure idée de ce qui peut se passer, on peut chercher la réponse de manière numérique en représentant différents signaux sur [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com). Essayez par exemple de rentrer ces deux formules sur le site:

$$\text{"sin(2 pi t) + cos(4 pi t)"} \text{ et "sin(2 pi t) + cos(4 t)"}$$

## 4 Filtre à moyenne mobile

a) Comment les signaux suivants sont-ils transformés après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période  $T_c = T$ ?



Pas besoin ici de formules mathématiques pour répondre: des dessins suffiront!

b) Qu'arrive-t-il à un signal périodique de période  $T$  (voir exercice ??) après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de même période  $T_c = T$ ?

c) Soit  $X(t) = \sin(2\pi f t)$ , une sinusoïde pure de fréquence  $f$ . Montrer qu'après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période  $T_c$ , l'amplitude du signal sortant  $\hat{X}(t)$  satisfait l'inégalité

$$|\hat{X}(t)| \leq |\text{sinc}(f T_c)| \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

où on rappelle que  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$  par définition.