

Série 8: Solutions

1 Que fait ce circuit?

L'expression logique pour la sortie de ce circuit est:

$$s = (x_1 \text{ OU } x_2) \text{ OU } (\text{NON } x_1 \text{ ET NON } x_2) = (x_1 \text{ OU } x_2) \text{ OU } (\text{NON } (x_1 \text{ OU } x_2))$$

qui vaut 1 pour toutes les valeurs d'entrée x_1 et x_2 !

2 Additionneur avec retenue en entrée

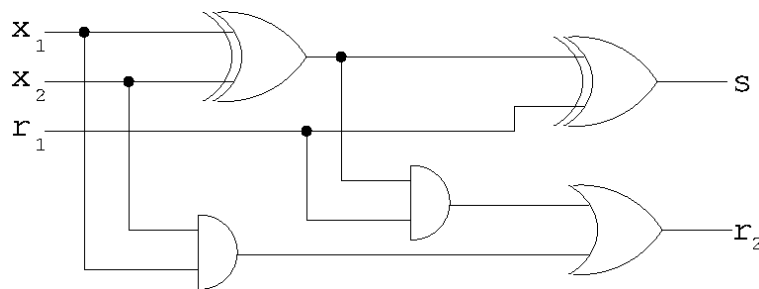
Remarquer tout d'abord que

$$s = x_1 \oplus x_2 \oplus r_1 = (x_1 \oplus x_2) \oplus r_1$$

et que

$$r_2 = (x_1 \text{ ET } x_2) \text{ OU } ((x_1 \oplus x_2) \text{ ET } r_1)$$

De là, on déduit le circuit:



3 Comparateur

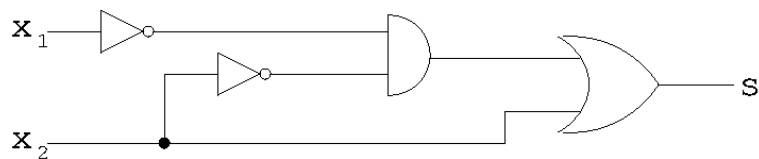
Observer tout d'abord que $x_1 \leq x_2$ si et seulement si

$$(x_2 = 1) \text{ OU } (x_1 = 0 \text{ ET } x_2 = 0)$$

On veut donc que la sortie du circuit soit donnée par

$$s = x_2 \text{ OU } (\text{NON } x_1 \text{ ET NON } x_2)$$

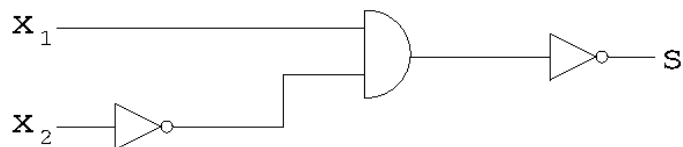
ce qui se traduit ainsi graphiquement:



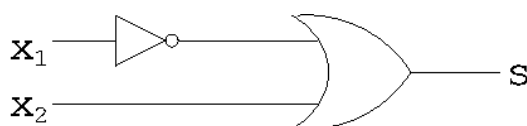
Une autre possibilité qui utilise une porte logique de moins est de remarquer que $x_1 \leq x_2$ si et seulement s'il n'est PAS vrai que $x_1 > x_2$, et donc qu'on cherche un circuit dont la sortie soit donnée par

$$s = \text{NON} (x_1 \text{ ET NON } x_2)$$

ce qui se traduit ainsi graphiquement:



Et une troisième possibilité, encore meilleure, est la suivante: $s = x_2 \text{ OU } (\text{NON } x_1)$, ce qui se traduit graphiquement par:



4 Une porte logique construite avec des transistors

a) En analysant le circuit, on voit que:

- si A et B valent 0 (i.e., qu'une tension basse est appliquée à la base de tous les transistors), alors le courant passe seulement dans les transistors du haut de la figure, et donc la tension à la sortie vaut Vdd, c'est-à-dire 1.
- si A vaut 0 et B vaut 1 (ou le contraire), alors le courant passe dans un des transistors du haut de la figure (et aussi dans un de ceux du bas, mais pas dans les deux), et donc la tension à la sortie vaut à nouveau 1.
- si A et B valent 1, alors le courant passe seulement dans les deux transistors du bas de la figure, et donc la tension à la sortie vaut Vss, c'est-à-dire 0.

La table de vérité de ce circuit est donc:

A	B	Out
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ce qui correspond à une porte "NON ET" (i.e., la négation de la porte ET).

b) Voici comment faire:

$$\text{NON } x = \text{NON ET}(x,x)$$

$$x_1 \text{ ET } x_2 = \text{NON} (\text{NON ET}(x_1,x_2))$$

Note: La porte NON est celle construite à la ligne précédente !

$$x_1 \text{ OU } x_2 = \text{NON ET} (\text{NON } x_1, \text{NON } x_2)$$

Note: A nouveau, la porte NON est celle construite à la première ligne.

5 Pour le plaisir: deviner deux nombres en une seule évaluation*

Après l'application des deux transformations de Hadamard, l'état de sortie vaut

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left((-1)^{f(0,0)} H|0\rangle \otimes H|0\rangle + (-1)^{f(0,1)} H|0\rangle \otimes H|1\rangle + (-1)^{f(1,0)} H|1\rangle \otimes H|0\rangle + (-1)^{f(1,1)} H|1\rangle \otimes H|1\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left((-1)^{f(0,0)} |+\rangle \otimes |+\rangle + (-1)^{f(0,1)} |+\rangle \otimes |-\rangle + (-1)^{f(1,0)} |-\rangle \otimes |+\rangle + (-1)^{f(1,1)} |-\rangle \otimes |-\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left((-1)^{f(0,0)} (|0,0\rangle + |0,1\rangle + |1,0\rangle + |1,1\rangle) + (-1)^{f(0,1)} (|0,0\rangle - |0,1\rangle + |1,0\rangle - |1,1\rangle) \right. \\
 & \quad \left. + (-1)^{f(1,0)} (|0,0\rangle + |0,1\rangle - |1,0\rangle - |1,1\rangle) + (-1)^{f(1,1)} (|0,0\rangle - |0,1\rangle - |1,0\rangle + |1,1\rangle) \right)
 \end{aligned}$$

En réordonnant un peu tout ça, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-1)^{f(0,0)} + (-1)^{f(0,1)} + (-1)^{f(1,0)} + (-1)^{f(1,1)}}{4} |0,0\rangle + \frac{(-1)^{f(0,0)} - (-1)^{f(0,1)} + (-1)^{f(1,0)} - (-1)^{f(1,1)}}{4} |0,1\rangle \\
 & + \frac{(-1)^{f(0,0)} + (-1)^{f(0,1)} - (-1)^{f(1,0)} - (-1)^{f(1,1)}}{4} |1,0\rangle + \frac{(-1)^{f(0,0)} - (-1)^{f(0,1)} - (-1)^{f(1,0)} + (-1)^{f(1,1)}}{4} |1,1\rangle
 \end{aligned}$$

En remplaçant maintenant f par son expression $f(x_1, x_2) = a_1 x_1 \oplus a_2 x_2$, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 + (-1)^{a_2} + (-1)^{a_1} + (-1)^{a_1 \oplus a_2}}{4} |0,0\rangle + \frac{1 - (-1)^{a_2} + (-1)^{a_1} - (-1)^{a_1 \oplus a_2}}{4} |0,1\rangle \\
 & + \frac{1 + (-1)^{a_2} - (-1)^{a_1} - (-1)^{a_1 \oplus a_2}}{4} |1,0\rangle + \frac{1 - (-1)^{a_2} - (-1)^{a_1} + (-1)^{a_1 \oplus a_2}}{4} |1,1\rangle
 \end{aligned}$$

Et vous pouvez alors vérifier que

- l'état de sortie vaut $|0,0\rangle$ si et seulement $a_1 = a_2 = 0$
- l'état de sortie vaut $|0,1\rangle$ si et seulement $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$
- l'état de sortie vaut $|1,0\rangle$ si et seulement $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$
- l'état de sortie vaut $|1,1\rangle$ si et seulement $a_1 = a_2 = 1$

En résumé, l'état de sortie vaut $|a_1, a_2\rangle$, i.e., ce qu'on cherche!