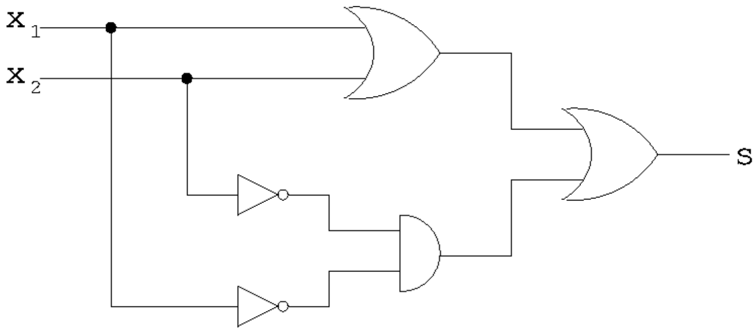
Série 8

1 Que fait ce circuit?

a) On considère le circuit logique suivant:

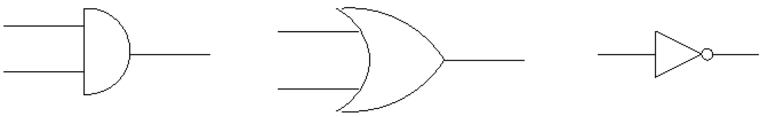


Ecrire la sortie s de ce circuit sous forme de proposition logique impliquant x_1 et x_2 et établir sa table de vérité:

x_1	x_2	s
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

2 Additionneur avec retenue en entrée

Au cours, vous avez vu comment réaliser, à l'aide des trois portes logiques ET, OU et NON suivantes:

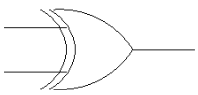


un additionneur dont l'entrée soit 2 bits x_1 et x_2, et dont la sortie soit 2 autres bits s et r, où

$$s = x_1 \oplus x_2 \qquad \text{et} \qquad r = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

i.e., s est l'addition modulo 2 des bits x_1 et x_2, tandis que r est la retenue de cette addition (qui ne prend donc la valeur 1 que lorsque $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$).

On vous demande de réaliser ici, à l'aide des mêmes portes ET, OU et NON, et de la porte additionnelle $\bigoplus$:



un additionneur complet dont l'entrée soit les 2 bits x_1 et x_2, ainsi qu'une retenue r_1 provenant d'une addition précédente, et dont la sortie soit 2 autres bits s et r_2, où

$$s = x_1 \oplus x_2 \oplus r_1 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 + x_2 + r_1 > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Indication: Réécrivez tout d'abord les égalités ci-dessus à l'aide de symboles logiques.

3 Comparateur

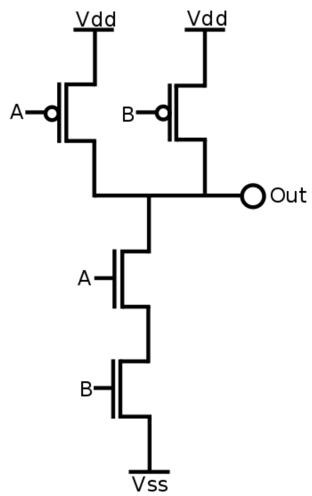
Réaliser un circuit logique avec les mêmes portes ET, OU et NON que ci-dessus, dont l'entrée soit 2 bits x_1 et x_2 et dont la sortie s soit le résultat du tableau de vérité ci-dessous:

x_1	x_2	s
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Combien de portes logiques votre solution utilise-t-elle? Pouvez-vous minimiser ce nombre? (les places ont chères sur les microprocesseurs actuels!)

Remarque: Au vu de la table de vérité ci-dessus, la sortie de ce circuit est donc le résultat de la comparaison "est-ce que $x_1 \leq x_2$"? Mais notez que si on interprète 0=faux et 1=vrai, alors la sortie de ce circuit indique aussi si l'affirmation logique "x_1 implique x_2" (notée "$x_1 \Longrightarrow x_2$") est vraie ou non.

4 Une porte logique construite avec des transistors



a) A et B sont les bits d'entrée de ce circuit. Quel est la sortie (Out) de celui-ci en fonction de A et B?

Remarque: Sur le schéma ci-dessus, Vdd correspond une tension de 5V ("1") et Vss correspond à une tension de 0V ("0").

b) Montrer qu'on peut construire chacune des trois portes NON, ET et OU à l'aide de la porte logique ci-dessus.

5 Pour le plaisir: deviner deux nombres en une seule évaluation*

Soient $a_1, a_2 \in \{0,1\}$ fixés ; considérons la fonction $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = a_1\, x_1 \oplus a_2\, x_2, \quad x_1, x_2 \in \{0,1\}$$

On aimerait apprendre les valeurs de a_1 et a_2 en effectuant un nombre minimum d'évaluations de la fonction f. Classiquement, ce problème se résoud avec deux évaluations de f, à savoir $f(1,0) = a_1$ et $f(0,1) = a_2$. Mais avec un algorithme quantique, une seule évaluation suffit!

Pour cela, on considère un système à deux qubits, initialement dans l'état $|0\rangle \otimes |0\rangle$ [1], aussi noté $|0,0\rangle$. Puis on applique à chacun de ces qubits la transformation de Hadamard définie dans le cours:

$$H\,|0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|0\rangle + |1\rangle) \quad H\,|1\rangle = |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|0\rangle - |1\rangle)$$

pour obtenir ainsi l'état

$$H\,|0\rangle \otimes H\,|0\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big) = \frac{1}{2}\,(|0,0\rangle + |0,1\rangle + |1,0\rangle + |1,1\rangle\Big)$$

Ensuite, on applique la porte oracle O_f à cet état, dont l'effet est le suivant:

$$O_f\,\left(\frac{1}{2}\Big(|0,0\rangle + |0,1\rangle + |1,0\rangle + |1,1\rangle\Big)\right) = \frac{1}{2}\Big((-1)^{f(0,0)}\,|0,0\rangle + (-1)^{f(0,1)}\,|0,1\rangle + (-1)^{f(1,0)}\,|1,0\rangle + (-1)^{f(1,1)}\,|1,1\rangle\Big)$$

Et finalement, on réapplique à chaque qubit la transformation de Hadamard vue précédemment.

A vous maintenant de montrer qu'en mesurant l'état de sortie des deux qubits (! long calcul !), il est possible de deviner la valeurs des deux nombres a_1 et a_2 (avec donc un seul appel à l'oracle O_f).

[1] La notation $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$ est ce qu'on appelle formellement un *produit tensoriel*, mais pour les besoins du présent exercice, vous pouvez interpréter ça comme un simple produit.