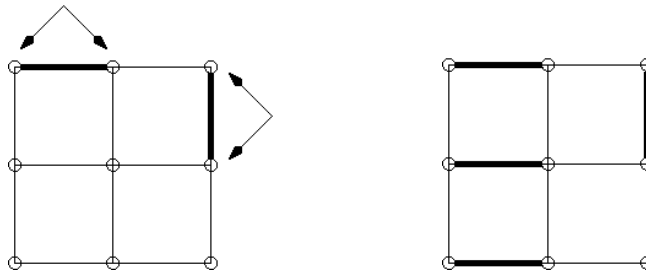


Série 6: Solutions

1 Organiser la surveillance d'un musée

Une première difficulté surgit quand on lit l'énoncé : comment trouver une stratégie utilisant au plus $2k$ gardiens sans connaître la valeur du nombre k ? En effet, supposer qu'on connaît la valeur exacte de k reviendrait à supposer qu'on connaît le placement optimal, ce qui est justement ce qu'on veut éviter d'avoir à calculer !

Cependant, il existe des arguments pour dire que k doit être au moins aussi grand qu'une valeur donnée. Par exemple, si le graphe possède deux arêtes qui sont disjointes (i.e., qui ne partagent pas un sommet), comme illustré sur le graphe de gauche ci-dessous, alors forcément que pour chacune des deux arêtes, il faudra qu'au moins un de ses deux sommets fasse partie de l'ensemble des sommets de la solution optimale, de sorte à ce que l'arête soit couverte. Ainsi, si le graphe possède ℓ arêtes disjointes, on sait que le nombre de sommets k de la solution optimale devra être plus grand ou égal à ℓ . Sur la figure de droite ci-dessous, on voit qu'au moins 4 arêtes du graphe sont disjointes, ce qui implique que la solution optimale doit contenir au moins 4 sommets (ce qui est bien le cas: cf. énoncé).



De là, on déduit l'algorithme permettant d'obtenir une solution avec au plus $2k$ gardiens:

1. déclarer S comme étant l'ensemble vide
2. stopper l'algorithme et sortir S si le graphe G contient moins de 2 sommets
3. choisir une arête au hasard dans le graphe G et inclure ses 2 sommets dans l'ensemble S
4. retirer du graphe G l'arête et ses 2 sommets, ainsi que toutes les arêtes partant de ces deux sommets
5. recommencer en 2. avec le nouveau graphe G ainsi obtenu

Le nombre d'itérations ℓ effectué par cet algorithme est certainement une borne inférieure au nombre optimal k de gardiens nécessaires à la surveillance du musée, car chacune des arêtes choisies est disjointe des autres, par construction. D'autre part, le nombre de gardiens sélectionnés est égal à 2ℓ (la taille de l'ensemble S), qui est comme on vient de le dire plus petit ou égal à $2k$, donc le but est atteint, car il est d'autre part clair que toutes les arêtes sont couvertes par l'ensemble S et que le temps d'exécution de l'algorithme est polynomial en n [$\Theta(n^2)$ dans le pire des cas, pour être plus précis].

2 Recherche de la médiane en place

Voici l'algorithme de subdivision de la liste L qui ne requiert pas de mémoire supplémentaire. Les données en entrée sont la liste L (de taille n) et la valeur du pivot p .

Subdivision
entrée : liste L de nombres entiers de taille n , pivot p (= valeur appartenant à la liste L)
sortie : liste L modifiée, nombres entiers k et ℓ
<pre>$i \leftarrow 1$ Pour j allant de 1 à n Si $L(j) < p$ $Permuter\ L(i)\ et\ L(j)$ $i \leftarrow i + 1$ $k \leftarrow i - 1$ Pour j allant de i à n Si $L(j) = p$ $Permuter\ L(i)\ et\ L(j)$ $i \leftarrow i + 1$ $\ell \leftarrow i - 1$ Sortir: L, k, ℓ</pre>

Explications: - La première boucle sur j place tous les éléments plus petits que le pivot p au début de la liste, et enregistre la position k du dernier de ces éléments (donc k correspond au nombre de ces éléments);

- La seconde boucle sur j place tous les éléments égaux au pivot p à la suite et enregistre la position ℓ du dernier de ces éléments (donc $\ell - k$ correspond au nombre de ces éléments);

- Et il n'y a pas besoin de troisième boucle ici pour créer la dernière sous-liste, car grâce aux deux premières étapes, tous les éléments plus grands que le pivot p se retrouvent dans la dernière partie de la liste L .

- L'algorithme sort la liste L ainsi modifiée, qui est donc composée de trois sous-listes: $L_1 = L(1 : k)$, $L_2 = L(k + 1 : \ell)$ et $L_3 = L(\ell + 1 : n)$ vérifiant les mêmes propriétés que celles vues en cours (mais sans qu'il y ait eu besoin de créer de nouvelles sous-listes à côté de la liste L).

3 Pour le plaisir: Un tour de cartes pour les vacances*

Toute l'idée pour Alice est de transmettre de l'information sur la 5e carte avec les 4 premières cartes. Vous direz: "comment est-ce possible, vu qu'elle ne peut pas choisir ces 4 cartes?" Elle ne peut pas choisir ces cartes, certes, mais elle peut choisir l'ordre dans lequel elle les révèle, et surtout, elle peut choisir aussi quelle est la 5e carte "secrète" !

Voici comment procéder : sur 5 cartes, il y en a forcément 2 de même couleur (par "couleur", on entend ici pique, cœur, carreau ou trèfle). Alice choisit donc de révéler en premier une des 2 cartes de même couleur (nous verrons encore laquelle des 2). Ainsi, Bob connaît déjà la couleur de la 5e carte en regardant celle de la première carte révélée par Alice.

Reste maintenant à transmettre de l'information sur la valeur de celle-ci. Pour cela, il reste 3 cartes à Alice, qu'encore une fois, elle n'a pas pu choisir elle-même. Par contre, elle peut choisir l'ordre dans lequel elle révèle ces 3 cartes, et le nombre d'ordres possibles avec 3 cartes vaut $3! = 6$. Nous verrons encore comment faire ça en pratique, mais retenons pour l'instant qu'avec ces 3 cartes, Alice est capable de transmettre un nombre de 1 à 6.

Comme nous l'avons dit plus haut, il y a toujours 2 cartes de même couleur parmi les 5 cartes : Alice peut donc choisir laquelle des 2 sera la première et laquelle sera la 5e. Il y a 13 cartes dans chaque couleur, et on peut définir un ordre circulaire sur ces 13 cartes de la manière suivante:

... 6 7 8 9 X V D R A 2 3 4 5 6 7 8 9 X V D R A 2 3 4 5 ...

Avec cet ordre circulaire, on voit que les 2 cartes choisies ne peuvent pas être à une distance de plus de 6 sur la ligne ci-dessus (vu qu'il y a 13 cartes différentes). Alice choisit donc (par exemple) de révéler la plus "petite" des 2 (i.e., celle le plus à gauche), et avec les 3 autres cartes, elle révèle le nombre entre 1 et 6 qu'il faut additionner à celle-ci pour trouver la valeur de l'autre carte. Et voilà !

Reste le dernier détail à régler: trouver la correspondance entre les 6 ordres différents et les nombres de 1 à 6. Voici une possibilité:

ordre	321	312	213	231	132	123
nombre	1	2	3	4	5	6

Dans l'exemple de l'énoncé, l'ordre est 312 (as de carreau (=3, la plus grande carte), 8 de trèfle (=1, la plus petite carte), 10 de cœur (=2, la carte au milieu des deux autres)), il faut donc "ajouter 2" au valet de pique. (*Note:* On utilise ici l'ordre du bridge pour la valeur des cartes.)