Série 3: Solutions

1 Quel est le bon algorithme?

Le bon algorithme est le 3. L'algorithme 1 a deux problèmes: a) si n est pair, il calcule la somme des $n/2$ premiers nombres pairs (donc pas ce qu'on veut); b) si n est impair, la condition de terminaison n'est jamais rencontrée et l'algorithme ne s'arrête jamais; l'algorithme 4 est problématique car pour $n \geq 1$, sa sortie est un nombre plus grand ou égal à 2^n, et l'algorithme 2 est encore plus problématique, car il ne s'arrête jamais pour toute valeur de $n \geq 2$.

2 Algorithme mystère

a) Dans ce cas, la sortie est "non" et la boucle "Tant que" est exécutée 3 fois.

b) L'algorithme est une version itérative de l'algorithme de recherche par dichotomie vu au cours, dont la sortie vaut "oui" si et seulement si x appartient à la liste ordonnée L. Sa complexité temporelle est la même que celle de sa version récursive, à savoir $\Theta(\log_2(n))$ [remarquer que ci-dessus, $3 = \log_2(n = 8)$, justement].

Note: En théorie, on peut montrer qu'il est toujours possible de "dérécursifier" un algorithme récursif pour le transformer en un algorithme itératif. Dans le cas présent, l'algorithme dérécursifié est simple à écrire, mais il existe des algorithmes reécursifs beaucoup plus difficiles à dérécursifier.

3 Au temps des Grecs

Algorithme d'Euclide - version récursive:

pgcd_récursif
entrée : *a, b deux entiers positifs* sortie : *pgcd* (a, b)
Si $b = 0$ ***Sortir :*** a **Sortir : pgcd_récursif**$(b, a \bmod b)$

Note: Dans la version itérative de l'algorithme (voir énoncé), lorsque $a < b$, la première étape de l'algorithme consiste simplement à intervertir a et b et recommencer (ce qu'on refait également ici).

4 Recherche de clé

On pourrait a priori penser qu'une solution simple du problème est la suivante:

recherche de clé

entrée : *carton*
sortie : *valeur binaire oui/non*

Si *je vois la clé dans le carton:*
  Sortir: *oui*
Sinon
  Si *le carton contient au moins un autre carton:*
    parcourir la liste de ces cartons et effectuer une recherche de clé dans chacun de ceux-ci
  Sinon
    Sortir: *non*

Mais l'algorithme ci-dessus ne fonctionne pas! Considérons par exemple le cas où la clé est contenue dans un petit carton contenu dans le grand carton d'origine, mais que par malchance, l'algorithme n'explore pas ce petit carton en premier, mais un autre petit carton qui ne contient pas la clé: l'algorithme sortira la réponse "non" dans ce cas, alors que la réponse qu'on attend est bien "oui".

Voici une des façons possibles de résoudre le problème:

recherche de clé

entrée : *carton*
sortie : *valeur binaire oui/non*

Si *je vois la clé dans le carton:*
  Sortir: *oui*
Sinon
  Si *le carton contient au moins un autre carton:*
    $s \longleftarrow$ *non*
    Pour c *parcourant la liste de ces cartons*
      Si **recherche de clé**(c)**=oui**
        $s \longleftarrow$ *oui*
    Sortir: s
  Sinon
    Sortir: *non*

Ici, l'algorithme récursif est "prudent" et ne sort pas tout de suite la réponse "non" s'il ne trouve pas la clé dans le premier petit carton exploré (un peu comme on le ferait de manière impulsive quand on cherche ses clés. . .), mais attend d'avoir exploré tous les petits cartons contenus dans le grand carton avant de conclure si la clé s'y trouve ou non. Et cette façon prudente de faire se répète à toutes les échelles.

5 Pour le plaisir: trouver une personne de confiance*

Remarquer tout d'abord que lorsque la personne A répond oui à la question posée en exemple ("Est-ce que la personne B dit toujours la vérité?"), soit A dit la vérité, auquel cas A et B disent tous deux la vérité, soit A ment, auquel cas A et B sont tous les deux des menteurs. Par contre, lorsque A répond non, soit A dit la vérité et B ment, soit A ment et B dit la vérité. La réponse donnée indique donc si A et B sont de même nature ou différents.

- Lorsqu'il y a trois personnes en tout (appelons-les A, B, C) et au plus un menteur, une seule question suffit (et est clairement nécessaire également: sans poser de question, on n'a que deux chances sur trois de choisir une personne de confiance). On choisit au hasard deux personnes (disons A et B), et on pose à l'une d'entre elles (disons A) la question "est-ce que B dit toujours la vérité?" Si A répond oui, on sait que A et B disent tous deux la vérité, car il n'y a pas plus d'un menteur en tout. Si A répond non, on sait que l'un des deux dit la vérité et l'autre est un menteur; comme on sait qu'il n'y a pas plus d'un menteur en tout, on en déduit que C est nécessairement une personne de confiance.

- Lorsqu'il y a cinq personnes en tout (appelons-les A, B, C, D, E) et au plus deux menteurs, trois questions suffisent. On pose d'abord à A la question: "est-ce que B dit toujours la vérité?", puis on pose à C la question: "est-ce que D dit toujours la vérité ?" Comme nous allons le voir, ces deux questions ne suffisent pas nécessairement à elles seules à identifier une personne de confiance, d'où le besoin d'une troisième question en général, qui dépend des réponses aux deux premières:

- Si A et C répondent non tous les deux, alors on sait qu'il y a 2 menteurs parmi A,B,C,D et donc que E est un une personne de confiance, car il n'y a pas plus de deux menteurs en tout.

- Si A répond non et C répond oui, alors on sait que C et D sont deux personnes de confiance (ils ne peuvent pas être deux menteurs, car A ou B est un menteur, et il n'y a pas plus de deux menteurs en tout).

- De manière symétrique, si A répond oui et C répond non, alors on sait que A et B sont deux personnes de confiance.

- Si A et C répondent oui tous les deux, alors on doit poser une troisième question pour les départager: on demande à A si C dit toujours la vérité:

Si A répond non, alors on sait que soit A, B disent toujours la vérité et C, D sont des menteurs, soit le contraire. Dans les deux cas, il est clair que E est une personne de confiance, car il n'y a pas plus de deux menteurs en tout.

Si A répond oui, alors A, B, C, D sont soit tous des personnes de confiance, soit tous des menteurs. Mais comme il n'y a pas plus de deux menteurs en tout, on sait que c'est la première alternative qui est vraie.