EPFL - Information, Calcul et Communication - Partie théorique

Série 2

1 Complexités temporelles

Estimez la complexité temporelle des algorithmes ci-dessous (repris en partie de la dernière série) en fonction du paramètre n et en utilisant la notation $\Theta(\cdot)$.

algorithme 1

entrée : *liste L de nombres entiers, de taille n, nombre entier M*
sortie : *nombre entier positif ou nul s*

```
i ⟵ 1
Tant que i ≤ n et L(i) ≤ M
    i ⟵ i + 1
s ⟵ i − 1
Sortir : s
```

algorithme 2

entrée : *nombre entier positif n*
sortie : *nombre entier positif s*

```
s ⟵ 0
Pour i allant de 1 à 2n
    s ⟵ s + i
Sortir : s
```

algorithme 3

entrée : *liste L de nombres entiers, de taille n, nombre entier positif x*
sortie : *oui/non*

```
Pour i allant de 1 à n − 1
    Pour j allant de i + 1 à n
        Si |L(j) − L(i)| > x
            Sortir: oui
Sortir : non
```

algorithme 4

entrée : *nombre entier positif n*
sortie : *nombre entier positif s*

```
s ⟵ 0
j ⟵ 1
Pour i allant de 1 à n
    Tant que j n'est ni un multiple
    de 5 ni un multiple de 7
        j ⟵ j + 1
    s ⟵ s + j
    j ⟵ j + 1
Sortir : s
```

2 Création d'algorithmes

a) Ecrivez un algorithme qui calcule la *moyenne arithmétique* d'une liste L de n nombres réels:

$$m_A = \frac{L(1) + L(2) + \cdots + L(n)}{n}$$

b) Ecrivez maintenant un algorithme qui *utilise l'algorithme précédent comme sous-algorithme* pour calculer la *moyenne géométrique* d'une liste L de n nombres réels positifs:

$$m_G = (L(1) \cdot L(2) \cdots L(n))^{1/n}$$

Indication: Calculer $\log_2(m_G)$ en utilisant le fait que $\log_2(a \cdot b) = \log_2(a) + \log_2(b)$ et $\log_2(a^b) = b \log_2(a)$.

c) Ecrivez un algorithme qui calcule le produit des deux plus grands nombres d'une liste L de n nombres reéls positifs (par exemple, si $L = (3, 6, 18, 12, 7)$ et $n = 5$, alors la sortie doit être $12 \times 18 = 216$).

d) Quelle est la complexité temporelle de votre dernier algorithme en fonction de la taille n de la liste L? (utiliser la notation $\Theta(\cdot)$)

3 Trier un tableau

a) Estimez la complexité temporelle de l'algorithme de tri par insertion vu au cours, en fonction de la taille n de la liste L à trier (utiliser la notation $\Theta(\cdot)$). Rappelez-vous que la complexité temporelle d'un algorithme est définie dans notre cours comme le nombre d'instructions exécutées par l'algorithme *dans le pire des cas*, i.e., pour les pires données d'entrée possibles.

b) Soit maintenant n un nombre entier positif et A un tableau de nombres entiers, de dimensions $2 \times n$. Si $n = 7$, un tel tableau pourrait être par exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 11 & 8 & 12 & 14 & 7 \\ 5 & 2 & 12 & 13 & 15 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

On aimerait trier ce tableau de façon à ce que dans chaque ligne et dans chaque colonne, les nombres soient rangés dans l'ordre croissant (de gauche à droite et de haut en bas, respectivement). Une version triée du tableau ci-dessus est par exemple:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 11 & 12 \\ 3 & 5 & 7 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

mais contrairement au cas d'une liste, qui n'a qu'une seule version triée, il y a ici plusieurs versions triées possibles du tableau A (par exemple, le 7 et le 8 peuvent être intervertis ci-dessus et le tableau reste trié).

Ecrivez un algorithme qui prenne en entrée le tableau A et sa dimension horizontale n, et dont la sortie soit une version triée du tableau A. Votre algorithme devra utiliser le sous-algorithme **tri par insertion**(L, n) d'une liste L de taille n.

Notation: $A(i, j)$ désigne l'élément de la i^e ligne et j^e colonne du tableau A (dans l'exemple ci-dessus: $A(2, 4) = 13$). On peut également utiliser la notation $A(1)$ et $A(2)$ pour désigner respectivement les première et seconde lignes du tableau A.

c) Quel est la complexité temporelle de votre algorithme? (utiliser la notation $\Theta(\cdot)$)

4 Pour le plaisir: une superstar arrive dans une réception mondaine*

Vous vous trouvez à une réception mondaine avec n autres personnes que vous ne connaissez pas et qui ne se connaissent pas non plus entre elles. Soudain, un bruit court qu'une superstar est arrivée à la réception, que tout le monde connaît sauf vous, apparemment. De son côté, la superstar ne connaît personne à la réception.

Votre tâche est d'identifier quelle est la superstar en posant au plus n questions du type "Est-ce que telle personne connaît telle autre personne?". Comment allez-vous procéder?

5 Pour le plaisir: deux lancers de pièces de monnaie*

Deux personnes jouent au jeu suivant: chacune lance une pièce de monnaie de son côté. Pour gagner, chacune doit essayer de deviner le résultat de la pièce lancée par l'autre. Le jeu est gagné (collectivement) si au moins une des deux personnes a annoncé le bon résultat. Y a-t-il un moyen pour ces deux personnes d'établir une stratégie à l'avance qui leur garantira de gagner avec plus de 50% de chance? Et si oui, quelle peut être la probabilité maximum de gagner?