Série 12

1 L'entropie d'un jeu d'échecs

a) Parmi les 64 cases d'un échiquier standard, on en tire une au hasard de manière uniforme. On suppose également que les pièces (dames, rois, tours, fous, cavaliers et pions) sont placées dans leur position de départ:

Si vous utilisez une stratégie optimale, de combien de questions binaires *en moyenne* allez-vous avoir besoin pour deviner la nature de la pièce qui se trouve sur la case tirée au hasard? Il vous faut distinguer parmi les 13 possibilités suivantes:

dame noire, roi noir, tour noire, fou noir, cavalier noir, pion noir, dame blanche,
roi blanc, tour blanche, fou blanc, cavalier blanc, pion blanc, ou encore case vide

Il se trouve que dans ce cas précis, le nombre moyen de questions que vous posez correspond exactement à l'entropie du jeu d'échecs (avec les pièces en position de départ) donnée par la formule du cours

$$H(\mathcal{X}) = \sum_{j=1}^{n} p_j \log_2\left(\frac{1}{p_j}\right) \tag{1}$$

où p_j est la probabilité d'apparition de la pièce numéro j sur l'échiquier (avec ici $n = 13$).

b) Supposons maintenant qu'on tire à nouveau une case au hasard sur un échiquier où quelques coups d'une partie ont déjà été joués:

A gauche, quelques pions ont simplement été déplacés, tandis qu'à droite, un pion blanc a été capturé et a donc disparu de l'échiquier.

Sans faire aucun calcul, déterminez pour chacun des cas ci-dessus si, par rapport à la position de départ, l'entropie du jeu a augmenté / est restée la même / a diminué.

2 Comparaisons d'entropies

a) Pour chaque paire de mots ci-dessous, estimer lequel des deux mots a la plus grande entropie, ou s'ils ont la même entropie. Pour cela, on peut bien sûr à chaque fois calculer les entropies des deux mots pour répondre, mais on peut aussi essayer de répondre sans faire de calculs, en raisonnant sur les probabilités d'apparition des lettres dans chaque mot (autre indice: à nombre égal de lettres, le mot qui donne le plus de possibilités de créer d'autres mots en réutilisant ses lettres est celui qui a la plus grande entropie).

1. EPFL et EEPPFFLL
2. MEDITERRANNEE et MEDETERRENNEE
3. AAAH et HAHA
4. ABB et ABBA
5. ACD et ACDC
6. ABR et ABRI
7. CALC et CALCUL

b) Considérons une séquence de lettres le longueur N finie. Est-il *toujours* vrai que si on ajoute à cette séquence une lettre qui fait déjà partie de la séquence, alors l'entropie de la nouvelle séquence (de longueur $N+1$) diminue?

c) Considérons une séquence de lettres le longueur N finie. Est-il *toujours* vrai que si on ajoute à cette séquence une lettre qui ne fait pas partie de la séquence, alors l'entropie de la nouvelle séquence (de longueur $N + 1$) augmente?

3 Un peu de magie noire

a) Calculez l'entropie de la séquence de lettres suivante (sans l'espace):

AVADA KEDAVRA

- en écrivant d'abord le résultat sous la forme $a + b \log_2(3) + c \log_2(5)$, où a, b, c sont des fractions de nombres entiers;

- puis en calculant le résultat numérique ou en l'approximant avec $\log_2(3) \simeq 1.58$ et $\log_2(5) \simeq 2.32$.

b) Créez un dictionnaire pour cette même séquence de lettres à l'aide de l'algorithme de Shannon-Fano. Combien de bits utilisez-vous pour représenter la séquence? Essayez différentes versions de l'algorithme et comparez.

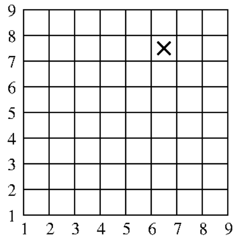
c) Créez ensuite un dictionnaire à l'aide de l'algorithme de Huffman. Combien de bits utilisez-vous pour représenter la séquence? A nouveau, essayez différentes versions de l'algorithme et comparez.

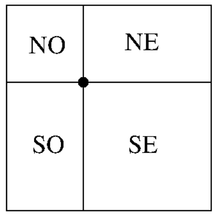
d) Comparez les résultats obtenus aux points a), b) et c). Ceci est-il cohérent avec ce que vous avez appris au cours?

Note: A chaque fois, il vous faut soit vous convaincre que c'est toujours vrai, à l'aide de plusieurs exemples (car la démonstration formelle est difficile et dépasse le cadre de ce cours), soit trouver un contre-exemple à l'affirmation énoncée.

4 A la recherche d'un trésor

Vous êtes à la recherche d'un trésor, dont la position est une case choisie au hasard et indiquée par une croix sur le plan à gauche ci-dessous. Pour trouver la position du trésor, vous devez choisir un point sur la grille et poser la question: dans quelle direction se trouve le trésor? Un oracle vous indiquera alors s'il est au nord-est (NE), au nord-ouest (NO), au sud-est (SE) ou au sud-ouest (SO), comme indiqué par exemple à droite ci-dessous. Bien sûr, il vous faudra interroger l'oracle en plusieurs points de la grille pour localiser le trésor.





a) Si vous utilisez une stratégie optimale, combien de questions faudra-t-il pour localiser le trésor?

b) Dans l'exemple ci-dessus à gauche, quelle est la suite des points où vous interrogerez l'oracle avec votre stratégie optimale? (utilisez la notation (a, b) pour un point, avec a, b allant de 1 à 9, a dénotant l'abscisse et b l'ordonnée du point).

c) Proposez un système *efficace* d'encodage avec des bits pour transmettre l'information de l'emplacement du trésor à un ami. En se basant sur votre système, quelle sera la séquence de bits que vous transmettrez à votre ami dans l'exemple ci-dessus à gauche?