

Série 9 : Solutions

1 Filtrer avant d'échantillonner

a) La bande passante du signal est infinie, car celui-ci possède un nombre infini de fréquences nf_0 allant jusqu'à l'infini et toutes les amplitudes a_n des harmoniques correspondantes sont supposées strictement positives ici. Bien sûr, ceci est un peu théorique, car la valeur de a_n décroît rapidement avec n ; les harmoniques correspondant à de grandes valeurs de n sont donc à peine audibles en pratique (aussi parce que notre oreille ne perçoit simplement pas les fréquences au-delà de 22 kHz).

b) Pour assurer que la condition d'échantillonnage soit satisfaite, il faut que $f_e > 2B$, où B est la bande passante du signal après filtrage.

1. Si $f_0 = 440$ Hz et $f_e = 44.1$ kHz, il faut que $B < 22.05$ kHz : en filtrant le signal avec une fréquence de coupure f_c comprise entre 22 kHz et 22'439 Hz, on s'assure de préserver les 50 premières harmoniques jusqu'à $f_{50} = 22$ kHz, tout en évitant l'effet stroboscopique lors de la reconstruction. Remarquez qu'il n'y a pas besoin que $f_e > 2f_c$, car le signal ne contient aucune composante entre 22 kHz et 22'439 Hz; on peut donc filtrer celui-ci avec n'importe quelle fréquence de coupure f_c dans cette intervalle.

2. Avec le même raisonnement, on conclut qu'avec une fréquence de coupure f_c comprise entre 21'780 Hz et 22'274 Hz, on préserve les 44 premières harmoniques du signal.

3. Encore avec le même raisonnement, on conclut qu'avec une fréquence de coupure f_c comprise entre 4'290 Hz et 4'619 Hz, on préserve les 13 premières harmoniques du signal.

c) Pour échantillonner correctement le signal, il faut utiliser une fréquence d'échantillonnage juste au-dessus de 6'800 Hz (disons égale à ce chiffre pour simplifier), donc le nombre de bits à enregistrer est de 300 (secondes) \times 6'800 \times 64 = 130'560'000 bits \approx 130 Mégabits.

2 Formule d'interpolation

c) Dans ce cas, $X(t)$ est une sinusoïde de fréquence $f = 314/2\pi$ qui est juste un peu plus petite que 50 Hz (car $2\pi = 6.28318\dots$); ici, f est aussi la bande passante de $X(t)$. D'un autre côté, $f_e = 1/T_e = 100$ Hz. La condition du théorème d'échantillonnage ($f_e > 2f$) est donc satisfaite et le signal reconstruit $X_I(t) = X(t) = \cos(314t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Note : Il est bien sûr aussi vrai que $X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \cos(314 m T_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - m T_e}{T_e}\right)$, mais pourquoi utiliser une formule si compliquée quand il y en a une autre beaucoup plus simple ?

d) La bonne réponse est la réponse (B) : la formule d'interpolation modifiée proposée dans l'énoncé n'est rien d'autre que la formule d'interpolation classique avec une période d'échantillonnage modifiée $\tilde{T}_e = 2T_e$. La fréquence d'échantillonnage correspondante est donc $\tilde{f}_e = f_e/2$, et la condition correspondante dans le théorème d'échantillonnage est $\tilde{f}_e > 2f_{\max}$, c'est-à-dire $f_e > 4f_{\max}$.

3 Fréquences d'échantillonnage admissibles (I)

On commence par décomposer le signal en somme de sinusoïdes. Le premier terme $\sin(11\pi t)$ a la fréquence $f_1 = 11/2 = 5.5$ Hz. Pour le second terme, on utilise l'identité $2 \cos(u) \sin(v) = \sin(u+v) - \sin(u-v)$:

$$4 \cos(10\pi t) \sin(2\pi t) = 2[\sin(12\pi t) - \sin(8\pi t)]$$

ce qui donne les fréquences $f_2 = 6$ Hz et $f_3 = 4$ Hz. La bande passante est donc $f_{\max} = 6$ Hz, et la condition de Nyquist exige $f_e > 2 \times 6 = 12$ Hz.

Les réponses correctes sont (C) 13 Hz et (D) 14 Hz.

4 Fréquences d'échantillonnage admissibles (II)

On identifie les fréquences de chaque composante :

$$f_1 = \frac{10\pi/3}{2\pi} = \frac{5}{3} \approx 1.67 \text{ Hz}, \quad f_2 = \frac{6\pi}{2\pi} = 3 \text{ Hz}, \quad f_3 = \frac{5\pi}{2\pi} = 2.5 \text{ Hz}.$$

La bande passante est donc $f_{\max} = 3$ Hz, et la condition de Nyquist exige $f_e > 6$ Hz.

Les réponses correctes sont (B) 10 Hz et (C) 8 Hz.

5 Vrai ou faux

- a) **FAUX.** La condition correcte est $f_e > 2f_{\max}$, et non $f_e > f_{\max}$. Il faut échantillonner à plus du double de la fréquence maximale du signal.
- b) **FAUX.** La condition suffisante est $f_e > 2f_{\max}$ (inégalité stricte). Avec $f_e = 2f_{\max}$ exactement, la reconstruction peut échouer (voir le cas $f_e = 2f$ dans le cours : reconstruction nulle, parfaite ou atténuée selon le déphasage).
- c) **VRAI.** La formule d'interpolation fait intervenir en théorie une somme infinie. En pratique, on la tronque à N termes de part et d'autre de t , ce qui constitue un compromis entre la précision de la reconstruction et le coût de calcul.