

Série 9

1 Filtrer avant d'échantillonner

Pour rappel (cf. série 8, ex.3) : lorsqu'on joue une note de musique sur instrument (p.ex. la note "La" à 440 Hz), on joue tout sauf une sinusoïde pure ! Le son produit est une somme de sinusoïdes :

$$X(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(2\pi n f_0 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

où f_0 est appelée la *fréquence fondamentale* (440 Hz dans le cas du "La"), et $n f_0$ sont les fréquences des *harmoniques* qui composent la note¹. Remarquez que les fréquences $n f_0$ des harmoniques sont toujours des *multiples* de la fréquence fondamentale f_0 , tandis que les amplitudes $a_n > 0$ de ces mêmes harmoniques (généralement décroissantes avec n) varient d'un instrument à l'autre ; elles déterminent ce qu'on appelle le *timbre* de l'instrument (i.e., l'allure du signal X).

a) Quelle est la bande passante du signal X ?

Pour enregistrer cette note de musique, on échantillonne le signal X à une certaine fréquence f_e . Si toutefois on veut éviter l'effet stroboscopique lors de la reconstruction du signal, il est nécessaire de filtrer le signal avant de l'échantillonner.

b) Pour chacune des fréquences fondamentales f_0 et fréquences d'échantillonnage f_e ci-dessous, déterminer quelle(s) fréquence(s) de coupure f_c il est possible d'utiliser afin de préserver un nombre maximum d'harmoniques du signal tout en évitant l'effet stroboscopique ; déterminer également le nombre d'harmoniques préservées dans chaque cas.

1. $f_0 = 440$ Hz ("La") et $f_e = 44.1$ kHz

2. $f_0 = 495$ Hz ("Si") et $f_e = 44.1$ kHz

3. $f_0 = 330$ Hz ("Mi") et $f_e = 8'820$ Hz

c) Beaucoup de systèmes de téléphonie mobile filtrent les signaux à 3.4 kHz (ce qui permet de transmettre à peu près correctement la voix humaine, tout en réduisant le nombre de données à transmettre, mais certainement pas la musique !) : combien de bits au minimum sont nécessaires pour enregistrer correctement une conversation de 5 minutes avec un tel système (avec une représentation des nombres réels en virgule flottante sur 64 bits) ?

Note : La téléphonie *large-bande* (avec une bande passante de 7 kHz, ou même de 22 kHz) est progressivement en train de remplacer ce "vieux" système.

2 Formule d'interpolation

c) On utilise maintenant la formule d'interpolation vue au cours pour reconstruire le signal X :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Dans le cas particulier où $X(t) = \cos(314t)$ et $T_e = 0.01$ seconde, que vaut $X_I(t)$?

d) Supposons maintenant que pour reconstruire un signal quelconque X de bande passante f_{\max} , on utilise la formule d'interpolation modifiée :

$$\tilde{X}_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(2mT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - 2mT_e}{2T_e}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

(A) Quelle que soit la bande passante f_{\max} du signal X , il est vrai que $\tilde{X}_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(B) On est sûr que $\tilde{X}_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si $f_e > 4f_{\max}$.

(C) On est sûr que $\tilde{X}_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si $f_e > f_{\max}$.

(D) Il n'est jamais vrai que $\tilde{X}_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, sauf si le signal X est identiquement nul.

1. Pour les musiciens : si $f_0 = 440$ Hz, alors $2f_0 = 880$ Hz est le "La" une octave au-dessus, $3f_0 = 1320$ Hz est le "Mi" encore une quinte au-dessus de cette octave, etc.

3 Fréquences d'échantillonnage admissibles (I)

On considère le signal suivant :

$$X(t) = \sin(11\pi t) + 4 \cos(10\pi t) \sin(2\pi t)$$

Pour quelle(s) fréquence(s) d'échantillonnage ci-dessous peut-on garantir une reconstruction parfaite du signal ?

- (A) 11 Hz (B) 12 Hz (C) 13 Hz (D) 14 Hz

4 Fréquences d'échantillonnage admissibles (II)

On considère le signal suivant :

$$x(t) = 3 \sin\left(\frac{10\pi}{3} t\right) + 2 \sin(6\pi t) + \sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

On souhaite échantillonner ce signal à une fréquence f_e (en Hz), puis le reconstruire parfaitement par interpolation sinc. Quelle(s) est(sont) la(les) fréquence(s) d'échantillonnage admissible(s) parmi les suivantes ?

- (A) 6 Hz (B) 10 Hz (C) 8 Hz (D) 3 Hz

5 Vrai ou faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (et justifier).

- a) Le théorème de Nyquist–Shannon stipule qu'un signal est parfaitement reconstituable si sa fréquence d'échantillonnage dépasse sa fréquence maximale f_{\max} .
- b) D'après le théorème d'échantillonnage de Nyquist–Shannon, si la bande passante maximale d'un signal vaut f_{\max} , une fréquence d'échantillonnage $f_e \geq 2f_{\max}$ est suffisante pour reconstruire exactement le signal.
- c) En pratique, un signal numérisé contient toujours un nombre fini d'échantillons. Lors de la reconstruction, on limite en plus la somme d'interpolation

$$X_I(t) = \sum_{n=-N}^N X(nT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

à un voisinage de taille N autour de t . Ce compromis entre précision et coût de calcul est nécessaire, puisqu'un enregistrement audio d'une heure, par exemple, peut déjà contenir des dizaines de millions d'échantillons.