Série 10: Solutions

1 Bande passante et fréquence d'échantillonnage

a) 1. La bande passante ne change pas.

2. La bande passante ne change pas.

3. La bande passante est multipliée par 3, car toutes les fréquences du signal sont multipliées par 3.

4. La bande passante devient $\max(B, f)$. En effet, comme $f \neq f_1, f_2, \ldots, f_n$, on est sûr ici qu'on ajoute une sinusoïde de fréquence f au signal qui ne peut pas s'annuler avec une sinusoïde déjà présente dans le signal d'origine X. S'il se trouve que $f > B$, c'est donc que f est la plus grande fréquence du nouveau signal; sinon, la bande passante reste la même.

5. $X'(t) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f_i a_i \sin(2\pi f_i t + \delta_i)$, donc la bande passante ne change pas non plus ici.

Pour s'assurer que la condition du théorème d'échantillonnage soit respectée, il faut donc échantillonner les signaux 1, 2 et 5 à une fréquence $f_e > 2B$, le signal 3 à une fréquence $f_e > 6B$ et le signal 4 à une fréquence $f_e > 2\max(B, f)$.

b) On suppose donc ici que

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(2\pi f_i t) \quad \text{et} \quad Y(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sin(2\pi g_j t)$$

avec les bandes passantes respectives $B_X = \max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et $B_Y = \max(g_1, g_2, \ldots, g_m)$.

1. La bande passante de $X(t) + Y(t)$ est en général égale à $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n, g_1, g_2, \ldots, g_n) = \max(B_X, B_y)$, *sauf* dans le cas où $B_X = B_Y = B$. Dans ce cas, supposons en effet que f_i et g_j, pour un i et un j donnés, correspondent aux fréquences les plus hautes dans les signaux X et Y, respectivement. Donc $f_i = g_j = B$ dans ce cas. S'il se trouve que $a_i = -b_j$, alors ces deux sinusoïdes de haute fréquence s'annulent dans le signal $X(t) + Y(t)$, d'où il en ressort que la bande passante de $X(t) + Y(t)$ est *plus petite* que $\max(B_x, B_Y) = B$. Tandis que dans le cas où $B_X \neq B_Y$, la sinusoïde ayant la plus grande fréquence parmi toutes ne peut s'annuler avec une autre.

2. Soit de nouveau f_i la plus haute fréquence du signal X et g_j la plus haute fréquence du signal Y. Donc $f_i = B_X$ et $g_j = B_Y$. Le signal $X(t) \cdot Y(t)$ comprend donc une composante de la forme

$$a_i\, b_j\, \sin(2\pi f_i t)\, \sin(2\pi g_j t)$$

qui, en utilisant le rappel de trigonométrie de l'énoncé, se réécrit de la manière suivante:

$$\frac{1}{2}\, a_i\, b_j\, (\cos(2\pi(f_i - g_j)t) - \cos(2\pi(f_i + g_j)t))$$

On peut vérifier que la composante de fréquence $f_i + g_j$ ci-dessus est la composante de plus haute fréquence dans le signal $X(t) \cdot Y(t)$, et que c'est aussi la seule: toutes les autres composantes ont des fréquences plus faibles. On obtient donc que la bande passante de $X(t) \cdot Y(t)$ est toujours *égale* à $f_i + g_j = B_X + B_Y$.

Pour s'assurer que la condition du théorème d'échantillonnage soit respectée, il faut donc échantillonner le signal $X + Y$ à une fréquence $f_e > 2\max(B_X, B_Y)$ et le signal $X \cdot Y$ à une fréquence $f_e > 2\,(B_X + B_Y)$.

2 Interlude musical

La taille du fichier est de $60 \times 60 \times 44000 \times 32 \simeq 5$ Gigabits.

3 Signaux périodiques et apériodiques

a) Oui, dans ce cas, $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique de même période T. En effet:

$$X_1(t+T) + X_2(t+T) = X_1(t) + X_2(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Seule exception: si $X_2(t) = -X_1(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $X_1(t) + X_2(t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) Si T_1 et T_2 sont des nombres entiers, alors le signal est périodique et sa période est le plus petit multiple commun de T_1 et T_2:

$$\text{ppmc}(T_1, T_2) = \min\{N \geq 1 : \text{ il existe } k, \ell \geq 1 \text{ tels que } N = kT_1 = \ell T_2\}$$

On peut le voir graphiquement, ou en vérifiant la formule suivante:

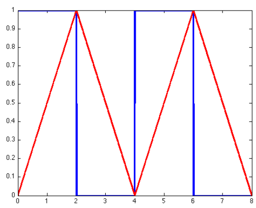
$$X_1(t+N) + X_2(t+N) = X_1(t+kT_1) + X_2(t+\ell T_2) = X_1(t) + X_2(t)$$

c) La période de la sinusoïde fondamentale est $T_0 = 1/f_0$, et les périodes des harmoniques sont de la forme $T_n = 1/(nf_0)$. Ainsi, T_0 est le plus petit multiple commun de toutes ces périodes, et le signal est donc périodique de période T_0 (ceci se voit bien graphiquement).

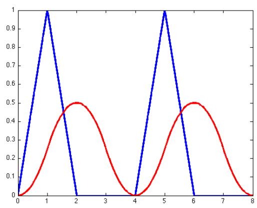
d) Dans ce cas, la réponse n'est pas forcément oui: ça dépend si le rapport T_1/T_2 est rationnel (auquel cas le signal est périodique) ou non (auquel cas le signal est apériodique). Avec les deux exemples donnés dans l'énoncé, on voit bien graphiquement que le premier signal est périodique, tandis que le second ne l'est pas.

4 Filtre à moyenne mobile

a) Après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$, on vérifie d'abord que les signaux $\hat{X}_1(t)$ et $\hat{X}_3(t)$ sont tous les deux constants au cours du temps et prennent la valeur $1/2$. Voici maintenant les formes des signaux $\hat{X}_2(t)$ et $\hat{X}_4(t)$ après passage à travers le même filtre à moyenne mobile (sur les graphes ci-dessous, $T = 2$):



$\hat{X}_2(t)$



$\hat{X}_4(t)$

b) Un signal périodique de période T sort constant d'un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$. Pour $0 \leq t \leq T$, on le voit au moyen de la formule suivante:

$$\begin{aligned}
\hat{X}(t) &= \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} X(s)\,ds = \frac{1}{T}\left(\int_{t-T}^{0} X(s)\,ds + \int_{0}^{t} X(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_{t-T}^{0} X(s+T)\,ds + \int_{0}^{t} X(s)\,ds\right) = \frac{1}{T}\left(\int_{t}^{T} X(s)\,ds + \int_{0}^{t} X(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} X(s)\,ds \quad \text{ne dépend pas de t}
\end{aligned}$$

Les exemples $X_1(t)$ et $X_3(t)$ du point a) illustrent bien ce fait.

c) On a vu au cours que

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t} \sin(2\pi f s)\, ds = \frac{\cos(2\pi f(t - T_c)) - \cos(2\pi f t)}{2\pi f T_c}$$

En utilisant une des formules du rappel de trigonométrie, on trouve que

$$\hat{X}(t) = \frac{2\sin(2\pi f(t - T_c/2))\, \sin(\pi f T_c)}{2\pi f T_c}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|\hat{X}(t)| \leq \left| \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \right| = |\mathrm{sinc}(f T_c)|$$

Lorsque que la période $T = \frac{1}{f}$ de la sinusoïde coïncide avec la période T_c du filtre à moyenne mobile, le signal sortant est nul, ce qui est encore un cas particulier de ce qu'on a trouvé au point b).